Übungen zur Vorlesung Physik III –Atom- und Quantenphysik –

Prof. C. Zeitnitz, Dr. F. Ellinghaus

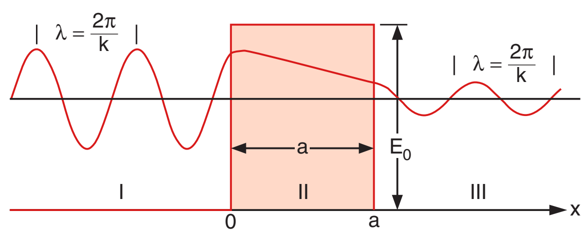
Wintersemester 2015/2016 Universität Wuppertal

Blatt IV

Abgabe bis Donnerstag, den 26. Nov 2015, 12:00

1. Tunneleffekt **(8 Punkte)**

In der Vorlesung wurde der Tunneleffekt besprochen. Das Gebiet mit Potential $E_0 > 0$ ist endlich breit und erstreckt sich von $0 < x < a$ (rechteckige Potentialbarriere). Man kann dann drei Bereiche unterscheiden.



(a) Schreiben Sie noch einmal den Ansatz für die drei Teile der Wellenfunktion sowie die Randbedingungen auf. Setzen Sie dann $\alpha = ik'$, da im folgenden der Fall $E < E_0$ untersucht werden soll und zeigen Sie, dass gilt:

$$A = \left(\cos(k'a) - i\frac{k^2 + k'^2}{2kk'}\sin(k'a)\right) A'e^{ika} \quad (1)$$

$$B = i\frac{k'^2 - k^2}{2kk'}\sin(k'a)A'e^{ika}, \quad (2)$$

wobei A, B die Koeffizienten in Bereich I sind.

(b) Berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten $T = \frac{k|A'|^2}{k|A|^2}$ als Funktion von E und E_0 (statt k und k_0), und zeigen Sie, dass

$$T = \frac{1 - E/E_0}{1 - (E/E_0) - (E_0/4E)\,\sin^2(\sqrt{2m(E - E_0)}\,a/\hbar)} \quad (3)$$

Berechnen Sie weiterhin den Reflexionskoeffizienten $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$ und geben Sie diesen in einer ähnlichen Form als Funktion von E und E_0 an. Zeigen Sie, dass $R + T = 1$.

(c) Elektronen treffen mit der Energie $E_{\mathrm{kin}} = 0.8\,\mathrm{eV}$, bzw. $1.2\,\mathrm{eV}$ auf eine rechteckige Potentialbarriere der Breite $a = 1\,\mathrm{nm}$ und Höhe $E_0 = 1\,\mathrm{eV}$. Wie gross sind jeweils die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten?

2. Unendlich tiefer Potentialtopf **(12 Punkte)**

Ein Teilchen befindet sich in einem unendlich tiefen Potentialtopf der Breite a.

(a) Wie lautet die Schrödingergleichung innerhalb des Potentialtopfs? Gehen Sie dabei zunächst von der zeitabhängigen Schrödingergleichung für $\psi(x,t)$ aus und zeigen Sie wie man den räumlichen und zeitlichen Anteil hier trennen kann.

(b) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung. Beachten Sie die Randbedingungen und benutzen Sie den Ansatz $u_n = C\sin(n\,\pi\,x/a)$. Berechnen Sie nun C unter Ausnutzung der Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_n(x)|^2 dx \;=\; 1$$

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\langle x \rangle$ für alle n :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u_n^*(x)\, x\, u_n(x) dx$$

(d) Ein Elektron sei in einem Gebiet $[0;\ 10^{-10}\ \mathrm{m}]$ (typischer Atomdurchmesser) eingeschlossen.

i. Wie viel Energie muss aufgewendet werden, damit ein Elektron vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand übergeht?

ii. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Grundzustand das Elektron in dem Gebiet $[0,49 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}; 0,51 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}]$ zu finden?
(Hilfe: Verwenden Sie die Näherung $\Psi(x) \approx (x = 0,5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m})$ für $x \in [0,49 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}; 0,51 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}]$.)

Die Übungsblätter und weitere Informationen sind verfügbar unter
`http://www.atlas.uni-wuppertal.de/~elli/AtomQuantenWiSe1516/`

ellinghaus@uni-wuppertal.de