

---

# Übungen zur Vorlesung Physik III – Atom- und Quantenphysik –

Prof. C. Zeitnitz, Dr. F. Ellinghaus

Wintersemester 2015/2016

Universität Wuppertal

---

## BLATT VI

ABGABE BIS DONNERSTAG, DEN 17. DEZ. 2015, 12:00

### 1. Kommutator

(5 Punkte)

Der Kommutator  $[\hat{A}, \hat{B}]$  zweier Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  ist definiert als:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (1)$$

(a) Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Rechenregeln:

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}] \quad (2)$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} \quad (3)$$

(b) Zeigen Sie unter Benutzung der Regeln aus a), dass folgende Vertauschungsrelation für die Drehimpuls-Operatoren gilt:  $[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar\hat{l}_z$ . Berechnen Sie weiterhin  $[\hat{l}_y, \hat{l}_z]$ .

(c) Zeigen Sie: Aus  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$  und  $[\hat{B}, \hat{C}] = 0$  folgt nicht  $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$ .  
Hinweis: Geben Sie ein möglichst einfaches Gegenbeispiel.

### 2. Drehimpulsoperatoren

(7.5 Punkte)

(a) Zeigen Sie  $[\hat{l}_z, \hat{l}^2] = 0$  mit  $\sum_{ij} \epsilon_{ijk} l_i l_j = i\hbar l_k$

(b) Man definiert die folgenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y \quad (4)$$

$$\hat{l}_- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y. \quad (5)$$

Berechnen Sie die Vertauschungsrelationen  $[\hat{l}^2, \hat{l}_\pm]$  und  $[\hat{l}_z, \hat{l}_\pm]$ .

- (c) Eigenwert des  $\hat{l}^2$  Operators:  
 Warum ist der Eigenwert von  $\hat{l}^2 = l(l+1)\hbar^2$  und nicht  $\hat{l}^2 = l^2\hbar^2$ ?  
*Hinweis: Benutzen Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und nehmen Sie an:  $\hat{l}^2 F_{l,m} = \omega^2 \hbar^2 F_{l,m}$*
- (d) Es sei  $l = 3$ . Bestimmen Sie den Betrag des Drehimpulses und die möglichen Werte von  $m$ .
- (e) Das Trägheitsmoment  $\Theta$  einer Vinyl-Schallplatte beträgt  $10^{-3} \text{ kg m}^2$ .
- Berechnen Sie den Drehimpuls  $L = \Theta \omega$ , wenn Sie mit  $\frac{\omega}{2\pi} = 33,3 \text{ U/min}$  dreht.
  - Wie groß ist ungefähr die Quantenzahl  $l$ ?

### 3. Bohrsches Atommodell

(7.5 Punkte)

Nach Bohr ist die Energie der Elektronen im Wasserstoffatom durch diskrete Werte  $E_n$  gegeben.

- Klassisch stellt man sich die Bewegung eines Elektrons um den Kern durch ein dynamisches Gleichgewicht zwischen Coulomb- und Zentrifugalkraft vor. Stellen Sie einen Ausdruck für die Gesamtenergie auf. Wie groß ist die Gesamtenergie für  $n = 1, 2, 3$ ?
- Berechnen Sie die erlaubten Radien  $r_n$  der Elektronenbahnen für  $n = 1, 2, 3$ . Was ergibt sich für die Geschwindigkeiten?
- Zeigen Sie, dass aus Bohrs Postulaten folgt, dass der Drehimpuls von Elektronen im Wasserstoffatom nur diskrete Werte annehmen kann und geben Sie den Drehimpuls für  $n = 1, 2, 3$  in Einheiten von  $\hbar$  an. Zeigen Sie, dass hierbei die Bahnlänge des Elektrons ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge ist.
- Bestimmen Sie die Rückstossenergie und die Rückstossgeschwindigkeit eines Wasserstoffatoms bei einem Übergang vom Zustand  $n = 3$  zum Zustand  $n = 1$  unter Emission eines Photons.
- Ein Myon  $\mu^-$  (207-fache Elektronenmasse) wird von einem Nickelatom ( $Z = 28$ ) eingefangen. Es bewegt sich im vollen (elektrischen) Kernpotential  $Z$ . Berechnen Sie den Bohrschen Bahnradius und die Bindungsenergie für  $n = 1$ .

---

Die Übungsblätter und weitere Informationen sind verfügbar unter  
<http://www.atlas.uni-wuppertal.de/~elli/AtomQuantenWiSe1516/>

ellinghaus@uni-wuppertal.de