
Übungen zur Vorlesung Physik III – Atom- und Quantenphysik –

Prof. C. Zeitnitz, Dr. F. Ellinghaus

Wintersemester 2015/2016

Universität Wuppertal

BLATT IX

ABGABE BIS DONNERSTAG, DEN 21. JAN. 2016, 12:00

1. Clebsch-Gordan: Addition von Drehimpulsen (9 Punkte)

Die Addition der Drehimpulse \vec{j}_1 und \vec{j}_2 zweier Teilchen oder die Addition von Spin und Bahndrehimpuls, etc. resultiert in einem Gesamtdrehimpuls \vec{J} . In Bezug auf eine Vorzugsrichtung (üblicherweise wird die z -Richtung gewählt) hat das System die Komponenten m_1 und m_2 für die einzelnen Drehimpulse oder M für den Gesamtdrehimpuls. Das System aus zwei Drehimpulsen kann daher durch verschiedene Basen dargestellt werden:

- Durch gemeinsame Eigenzustände von \hat{j}_1^2 , \hat{j}_2^2 , \hat{j}_{1z} und \hat{j}_{2z} , also Zustände mit wohldefinierter z -Komponente der Einzeldrehimpulse. In Kurzschreibweise: $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ oder $|m_1, m_2\rangle$
- Durch gemeinsame Eigenzustände von \hat{j}_1^2 , \hat{j}_2^2 , \hat{J}^2 und \hat{J}_z , also Zustände mit wohldefiniertem Betrag und z -Komponente des Gesamtdrehimpulses. In Kurzschreibweise: $|j_1, j_2, J, M\rangle$ oder $|J, M\rangle$

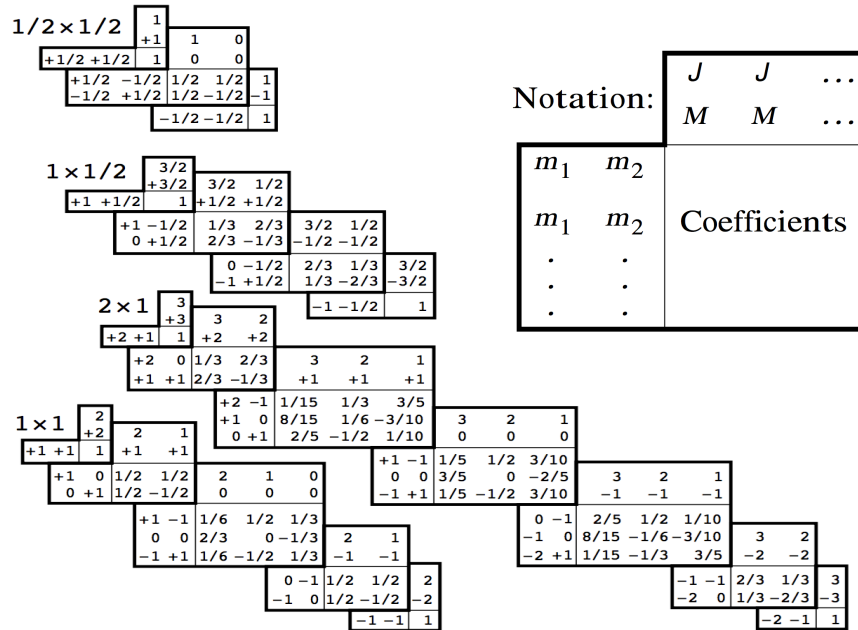
Beide Basen können durch eine Transformationsmatrix ineinander umgerechnet werden. Deren Matrixelemente heißen Clebsch-Gordan-Koeffizienten und können berechnet werden. In der Praxis werden diese meist einer Tabelle entnommen, wobei im Bild unten ein kleiner Auszug dargestellt ist.

Zum Beispiel entnimmt man der Tabelle 1×1 die Kombination zweier Drehimpulse $j_1 = 1, j_2 = 1$ zum Gesamtzustand mit $J = 2$ und $M = 0$:

$$|J = 2, M = 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|m_1 = 1, m_2 = -1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|m_1 = 0, m_2 = 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|m_1 = -1, m_2 = 1\rangle$$

- (a) Warum ist es in der Atomspektroskopie wichtig zu wissen, mit welchem Anteil eine bestimmte Kombination von Einstellungen der Einzeldrehimpulse in einem Zustand mit wohldefiniertem Gesamtdrehimpuls zu finden ist?

CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS



Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

- (b) Betrachten Sie ein System aus zwei Elektronen. Berechnen Sie anhand der Tabelle, zu welchem Gesamtspin die Elektronen koppeln können. Wie kann sich der Gesamtspin in z -Richtung orientieren, und wie setzen sich diese Zustände aus den Orientierungen der Einzelspins zusammen? Geben Sie alle möglichen Kombinationen wie in dem oben angegebenen Beispiel an.
- (c) Sie haben ein Element niedriger Kernladungszahl mit zwei Valenzelektronen, von denen eins auf eine höhere Schale angeregt ist. Die Spins der Elektronen koppeln zum Gesamtspin $S = 1$. Die Bahndrehimpulse koppeln zu dem Gesamt-Bahndrehimpuls $L = 2$. \vec{S} und \vec{L} koppeln zum Gesamtdrehimpuls \vec{J} .
- Wie hoch ist die Multiplizität der Endzustände?
 - Wie setzen sich die Zustände mit Gesamtdrehimpuls $J = 3$ aus den individuellen Spin und Bahndrehimpulsen zusammen? Geben Sie alle möglichen Kombinationen wie in dem oben angegebenen Beispiel an.
 - Welche z -Komponente M ergibt sich bei Kopplung von L und S mit $m_L = -1$ und $m_S = +1$ und welchem Gesamtdrehimpuls J entspricht dies?
 - Welche Einstellung m_L des Bahndrehimpulses L ist am wahrscheinlichsten in einem Zustand mit Gesamtdrehimpuls $J = 2$ und z -Komponente $M = -1$?

2. LS-Kopplung

(3 Punkte)

Welchen Winkel bilden \vec{L} und \vec{S} miteinander für 7F_6 ?

3. Elektronenspinresonanz

(3 Punkte)

Als Elektronenspinresonanz (ESR) bezeichnet man Übergänge zwischen Zuständen, die sich nur durch die Werte der magnetischen Quantenzahl m_l oder der Spinquantenzahl m_s unterscheiden. Die Aufspaltung der Zustände erfolgt durch ein externes Magnetfeld (Zeeman-Effekt), und die magnetische Quantenzahl ändert ihren Wert um $|\Delta m = 1|$. Die Frequenz der elektromagnetischen Strahlung, die benötigt wird um ESR-Übergänge anzuregen, liegt im Mikrowellenbereich.

Betrachten Sie die Elektronenspinresonanzanregung im Wasserstoff im $2^2S_{1/2}$ Zustand. Wie groß muss das Magnetfeld gewählt werden, damit ein Übergang mit elektromagnetischen Wellen der Wellenlänge $\lambda = 3$ cm angeregt werden kann ?

4. Lithiumatom

(5 Punkte)

Ein Lithiumatom besitzt die Kernladungszahl $Z = 3$. Zwei der drei Elektronen befinden sich im Zustand mit $n = 1$, während sich das dritte Elektron im Zustand $n = 2$ befindet. Die Kernladung wird so für das dritte Elektron von den beiden anderen abgeschirmt. Die Kernladungszahl, die das dritte Elektron noch sieht, nennt man effektive Kernladungszahl Z' .

- Wie groß ist die Energie für das Elektron mit $n = 2$? Nehmen Sie dafür an, dass die Kernladung vollständig von den Elektronen mit $n = 1$ abgeschirmt wird, d.h., das äußere Elektron sieht einen Kern mit $Z' = 1$.
- Geben Sie einen Ausdruck für den Radius der Bahn des äußeren Elektrons in Abhängigkeit der effektiven Kernladungszahl Z' an.
- Experimentell findet man, dass die Ionisierungsenergie von Lithium 5,39 eV beträgt. Berechnen Sie mit Hilfe dieses Ergebnisses die effektive Kernladungszahl von Lithium aus Sicht des äußeren Elektrons.