

Beispielprotokoll für das Anfänger Praktikum

Bergische Universität Wuppertal
Christian Riegel - 31. Januar 2014
criegel@uni-wuppertal.de

Dieses Beispielprotokoll ist dazu gedacht, Studenten auf das Anfänger Praktikum vorzubereiten. Da in Schulen die Anfertigung von Protokoll nicht behandelt wird, werden die nötigen Bestandteile gezeigt.

Aufgabe eines Versuchsprotokolls ist das Festhalten und Darstellen einer Messung und der erhaltenen Ergebnisse. Hauptaspekt ist die Reproduzierbarkeit der Messung: Eine wissenschaftliche Entdeckung wird niemals anerkannt, wenn es nicht möglich ist, die Ergebnisse erneut herbeizuführen und zu bestätigen. Aus diesem Grund muss ein Protokoll die dazu benötigten Informationen enthalten.

Der Übersichtlichkeit dienen logische Abschnitte, die folgenden sind unverzichtbar:

1. Einleitung (z.B. "Ziel des Versuches")
2. Versuchsskizze
3. Durchführung
4. Messwerte
5. Auswertung
6. Fehlerrechnung
7. Diskussion

Die Reihenfolge ist nicht streng und muss evtl. angepasst werden, z.B. wenn ein Versuch aus mehreren verschiedenen Versuchsteilen besteht, die aufeinander aufbauen oder unabhängig voneinander sind.

Im folgenden Protokoll werden auch mehrere Möglichkeiten der Auswertung gezeigt, natürlich ist für ein Protokoll nur eine einzige Auswertung nötig.

Anmerkungen zum Beispielprotokoll, die lediglich der Erläuterung der einzelnen Teile dienen, sind in grau unterlegten Boxen gehalten.

Beispielversuch - Dynamische Bestimmung der Federkonstanten

Christian Riegel

31. Januar 2014

Ziel des Versuches

In diesem Versuch wird die Federkonstante von zwei Federn durch die Messung der Schwingungsdauern von gemeinsam mit verschiedenen Gewichten gebildeten Federpendeln bestimmt.

Verwendete Geräte

- Massestücke (jeweils ungefähr 50 g)
- Präzisionswaage
- Stoppuhr

Eine Einleitung wie oben gibt einem Protokoll die nötige Form und erleichtert das Lesen ungemein. Es müssen an diesen Stellen keine Romane geschrieben werden, die nötigen Details folgen hinterher.

Nach dem Kopf mit Titel, Autor und Datum (und idealerweise auch Matrikelnummer) folgt eine knappe und kurze Beschreibung, um beim Lesen direkt zu wissen, worum es geht. Eine Liste der verwendeten Geräte muss nicht unbedingt sein, aber da Protokolle darauf ausgelegt sind, den Versuch reproduzierbar (!) nachzuvollziehen, lohnt sich eine kurze Liste. Gegebenenfalls gibt man bei den Geräten auch Marke und Model an, um die Geräte eindeutig zu identifizieren.

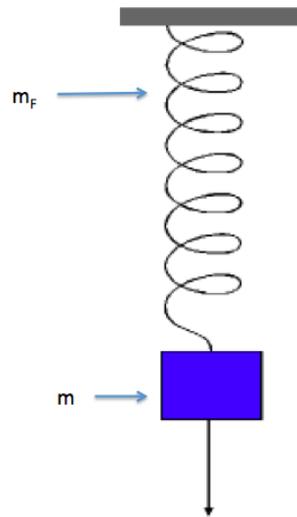


Abbildung 1: Versuchsaufbau: Die Feder der Masse m_F wird mit unterschiedlichen Gewichten m belastet und in vertikale Schwingungen versetzt.

Skizze

Eine Skizze ist unverzichtbar, bei komplizierteren Versuchen ist sie die wichtigste Hilfe, um den Versuch zu verstehen. Größen, die wie im obigen Beispiel m oder m_F benannt wurden, können so übersichtlich definiert werden.

Für jede Art von von Abbildung in einem Protokoll (Skizze / Foto / Diagramm) gilt: Es muss eine selbsterklärende Bildunterschrift vorhanden sein!

Meist sind Skizzen schneller von Hand gezeichnet und evtl. eingeklebt. Es sollen keine Kunstwerke produziert werden, der Sachverhalt muss deutlich werden! Durch die heutige Ausstattung mit Digitalkameras sind auch Fotos des Aufbaus eine schöne Ergänzung geworden. Sie ersetzen jedoch niemals eine Skizze mit aussagekräftiger Beschriftung! Bei Versuchen mit elektrischen Schaltungen ist ein aussagekräftiger Schaltplan anzugeben!

Durchführung

Die Feder wird fest montiert und mit mehreren Gewichten m belastet wie in Abbildung 1 angegeben. Danach wird das Federpendel jeweils zum Schwingen gebracht und die Schwingungsdauer T bestimmt. Die Zeitmessung erfolgt mit einer Stoppuhr und wegen des kleineren Messfehlers bei den Nulldurchgängen des Schwingers und nicht bei den Umkehrpunkten. Die Messung wird jeweils dreimal wiederholt und es werden die Zeiten t_i für 20 Schwingungen bestimmt.

Für die Schwingungsdauer T gilt bei Berücksichtigung der Federmasse m_F die erweiterte Formel:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \sqrt{m + \frac{m_F}{3}} \quad (1)$$

Mit dem Ziel einer Linearisierung der Ergebnisse wird das Quadrat der Schwingungsdauer T^2 gegen die Masse m der Massestücke aufgetragen. Aus der Steigung A und dem Achsenabschnitt B der angepassten Gerade werden anschließend Federmasse m_F und -konstante D bestimmt:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot m + \frac{4\pi^2 m_F}{3D} = A \cdot m + B \quad (2)$$

$$\Rightarrow D = \frac{4\pi^2}{A} \quad (3)$$

$$\Rightarrow m_F = \frac{3DB}{4\pi^2} \quad (4)$$

Abschließend wird die Federmasse (innerhalb der Möglichkeiten der verwendeten Waage) durch Wiegen bestimmt und mit dem aus der Schwingungsdauer ermittelten Ergebnis verglichen.

Die "Durchführung" ist der wichtigste Punkt eines jeden Protokolls. Hier muss klar und deutlich dargelegt werden, was gemacht wurde. Nur auf diese Art ist eine reproduzierbare Dokumentation möglich. In diesem Praktikum wird noch kein Theoriabschnitt verlangt. Können Teile aber in Kürze beschrieben werden wie z.B. anhand von Formel (1), dient das sicher der Übersichtlichkeit und auch Euch selbst beim späteren Lesen.

Fehlerrechnung

Die Fehler der berechneten Größen werden mit Fehlerfortpflanzung erster Ordnung berechnet. Da bei der Berechnung einer Ausgleichgeraden die ermittelte Steigung und der ermittelte Achsenabschnitt (je nach Vorgehen bei der Berechnung) keine unabhängigen Größen darstellen, muss dies bei der Bestimmung der Fehler berücksichtigt werden.

Im Zuge des Anfängerpraktikums wird jedoch zur Vereinfachung hierauf verzichtet und die Fehlerfortpflanzung für unabhängige Größen verwendet:

$$\Delta D = 4\pi^2 \frac{\Delta A}{A^2} \quad (5)$$

$$\Delta m_{\text{F}} = \frac{3}{4\pi^2} \cdot \sqrt{B^2 \Delta D^2 + D^2 \Delta B^2} \quad (6)$$

Wissenschaftliches Messen und Arbeiten ist immer mit Messfehlern verbunden. Umso wichtiger ist es, die Berechnung der Fehler klar darzulegen. Wie oben erwähnt, sind A und B stark korreliert. Wir verzichten zwar im Anfängerpraktikum auf die Berücksichtigung der Korrelation, dies stellt jedoch im strengen Sinne eine fehlerhafte Berechnung da und muss deswegen zumindest an dieser Stelle erwähnt werden. In späteren Praktika wird eine derartig vereinfachte Berechnung nicht mehr erlaubt sein.

Die Betrachtung der relativen Fehler zeigt, dass keiner der Fehler die Fehler der berechneten Größen dominiert:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta A}{A} \quad (7)$$

$$\frac{\Delta m_{\text{F}}}{m_{\text{F}}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} \quad (8)$$

Die Berechnung der relativen Fehler zeigt deutlich, ob der Fehler einer Messgröße stärker ins Gewicht fällt. In diesem Fall sollte das Augenmerk darauf liegen, diesen Fehler zu minimieren.

Messwerte und Ergebnisse

Die Messwerte sind für die beiden untersuchten Federn getrennt in den Tabellen 1 und 2 aufgeführt:

Tabelle 1: Messung Feder 1: Die Massen der Gewichte wurden mit der Waage bestimmt, die Zeiten über 20 Schwingungen ermittelt. Die Fehler wurden aus den Ablesegenauigkeiten abgeschätzt. T^2 ist das Quadrat der mittleren Schwingungsdauer einer Schwingung.

m / g	t_1 / s	t_2 / s	t_3 / s	\bar{t} / s	T^2 / s^2
$49,6 \pm 0,1$	$17,0 \pm 0,2$	$17,0 \pm 0,2$	$17,2 \pm 0,2$	$17,1 \pm 0,1$	$0,72 \pm 0,02$
$99,1 \pm 0,1$	$23,2 \pm 0,2$	$23,2 \pm 0,2$	$23,5 \pm 0,2$	$23,3 \pm 0,1$	$1,37 \pm 0,02$
$148,8 \pm 0,1$	$28,0 \pm 0,2$	$28,0 \pm 0,2$	$28,0 \pm 0,2$	$28,0 \pm 0,1$	$1,96 \pm 0,03$

Tabelle 2: Messung Feder 2: Die Beschriftung entspricht der von Tabelle 1.

m / g	t_1 / s	t_2 / s	t_3 / s	\bar{t} / s	T^2 / s^2
$49,8 \pm 0,1$	$16,0 \pm 0,2$	$16,1 \pm 0,2$	$16,1 \pm 0,2$	$16,1 \pm 0,1$	$0,64 \pm 0,02$
$99,5 \pm 0,1$	$21,9 \pm 0,2$	$22,0 \pm 0,2$	$21,9 \pm 0,2$	$21,9 \pm 0,1$	$1,21 \pm 0,03$
$149,0 \pm 0,1$	$26,5 \pm 0,2$	$26,6 \pm 0,2$	$26,6 \pm 0,2$	$26,6 \pm 0,1$	$1,77 \pm 0,03$

Messwerttabellen besitzen immer eine kurze Überschrift. Da an dieser Stelle auch die Fehler der Messwerte erwähnt werden müssen, bietet es sich an, die verwendeten Fehler, die sich meist aus Abschätzung der Messgenauigkeit ergeben, zu erwähnen. Die Abschätzung selbst ist (meistens) Euch überlassen: Schwanken die Werte eines digitalen Messgerätes z.B. stark, so sollte dies in den Fehlern berücksichtigt werden!

Wenn Messwerte Einheiten besitzen (was so gut wie immer der Fall ist), dann müssen diese Einheiten erwähnt werden!! Die Angabe $m=5$ für eine Masse ist wertlos!

In Tabellen und Diagrammen dividiert man Größe durch Einheit (z.B. T^2 / s^2) um eine reine Zahl anzugeben.

Auswertung

In diesem Beispielprotokoll wird die Auswertung zweimal durchgeführt. Die Daten müssen graphisch aufgetragen werden, dies ist sowohl mit Hilfe eines Computerprogramms als per Hand auf Millimeterpapier möglich. Beide Möglichkeiten werden im Rahmen des Anfängerpraktikums akzeptiert, sofern der Assistent eines Versuches eine bestimmte Variante nicht explizit wünscht.

Bei beiden Auswertemöglichkeiten sind jedoch einige Dinge gleichmaßen unverzichtbar:

- Die Achsen der Graphen mit Größe geteilt durch Einheit sind gut lesbar zu beschriften.
- Zu jedem Datenpunkt müssen die entsprechenden Fehler eingezeichnet werden.
- Jede Kurve und jeder Datensatz muss in ausreichender Weise (Legende oder eindeutige Beschriftung) gekennzeichnet sein.

Als Erstes nun die Auswertung mit Hilfe eines Computerprogramms:

Die Messwerte zeigt Abbildung 2. Man sieht den linearen Zusammenhang zwischen dem angehängten Gewicht und dem Quadrat der Schwingungsdauer. Aus dem Diagramm (siehe Anhang) wurden die folgenden Werte für Steigung und Achsenabschnitt bei der Messung der ersten Feder abgelesen:

$$A_1 = (12,6 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}^2}{\text{g}}$$

$$B_1 = (0,10 \pm 0,04) \text{s}^2$$

Unter Verwendung der Gleichungen (3) bis (6) wurden die folgenden Werte bestimmt:

$$D_1 = (3,1 \pm 0,1) \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$$m_{1,F} = (24 \pm 9) \text{g}$$

Die Kontrollmessung der Federmasse mit Hilfe der Präzisionswaage ergab $m'_{1,F} = (20,2 \pm 0,1) \text{g}$.

Dieser Wert entspricht im Rahmen des Fehlers der aus dem Diagramm bestimmten Federmasse. Zur Reduzierung des Fehlers müssten noch mehr Messungen durchgeführt werden.

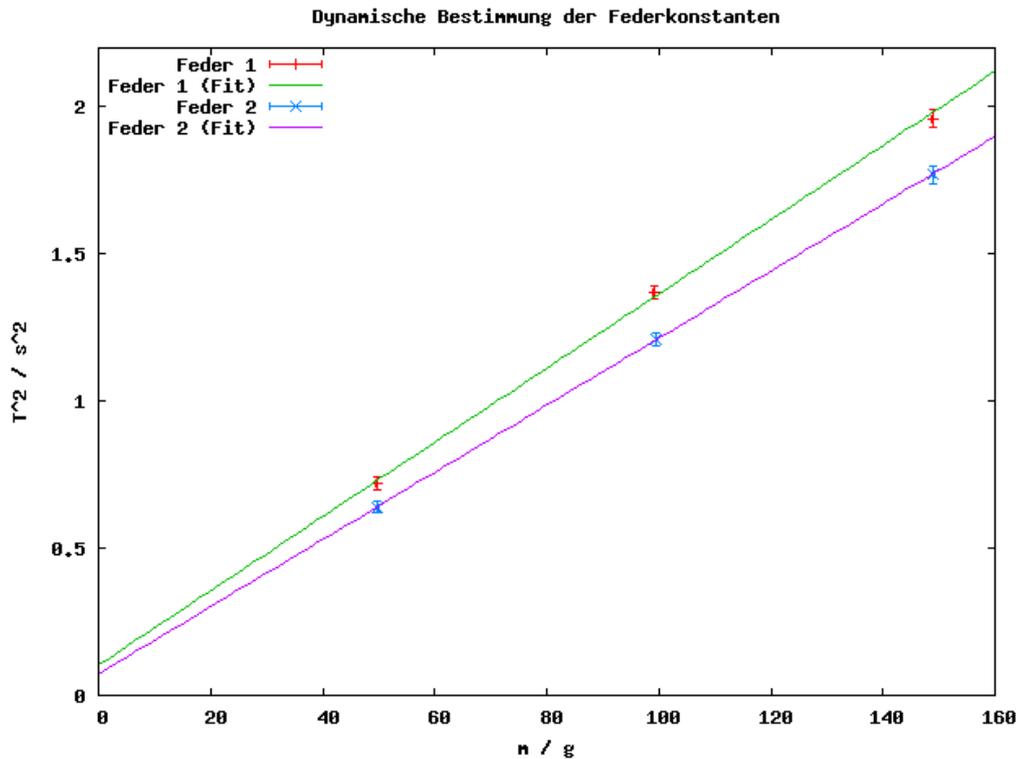


Abbildung 2: Bestimmung der Federkonstanten: Das Quadrat der Schwingungsdauer T^2 ist aufgetragen gegen die Masse m_F . Zur Bestimmung der Parameter sind lineare Funktionen angepasst.

Auch für die zweite Feder zeigt das Diagramm den erwarteten linearen Zusammenhang. Die folgenden Werte wurden bestimmt:

$$A_2 = (11,40 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \frac{s^2}{g}$$

$$B_2 = (0,073 \pm 0,005) s^2$$

Erneut wurden Federkonstante und Masse berechnet:

$$D_2 = (3,46 \pm 0,02) \frac{kg}{s^2}$$

$$m_{2,F} = (19 \pm 1) g$$

Für die zweite Feder ergab die Kontrollmessung eine Masse von $m'_{2,F} = (17.8 \pm 0.1) g$. Die Werte stimmen innerhalb der ihrer Fehler überein.

Nun wie angekündigt die alternative (!) Auswertung mit Hilfe von Millimeter Papier. Auch dieser Teil enthält hier zwei verschiedene Möglichkeiten, die benötigten Parameter zu bestimmen.

Die Messwerte wurden graphisch aufgetragen (Diagramm siehe Anhang). Man sieht für beide Feder deutlich den erwarteten linearen Verlauf. Die Steigungen wurden jeweils aus Steigungsdreiecken bestimmt:

$$A_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{(1,75 \pm 0,03) \text{ s}^2}{(140 \pm 3) \text{ g}} \quad (9)$$

$$= (12,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}^2}{\text{g}} \quad (10)$$

$$A_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{(1,59 \pm 0,03) \text{ s}^2}{(140 \pm 3) \text{ g}} \quad (11)$$

$$= (11,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}^2}{\text{g}} \quad (12)$$

Die Fehler Δy_i und Δx_i wurden auf drei "Kästchen" des Millimeterpapiers abgeschätzt, um sowohl eine Ablesegenauigkeit von einem "Kästchen" als auch den Fehler beim Ermitteln der Gerade zu berücksichtigen. Der resultierende Fehler ΔA_i wurde berechnet zu:

$$\Delta A_i = \sqrt{\frac{\Delta y_i^2}{x_i^2} + \frac{y_i^2 \Delta x_i^2}{x_i^4}} \quad (13)$$

$$\frac{\Delta A_i}{A_i} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{y_i}\right)^2} \quad (14)$$

Erneut zeigt die Betrachtung der relativen Fehler, dass sich die relativen Fehler quadratisch addieren.

Die Achsenabschnitte B_i wurden aus dem Diagramm abgelesen, ihre Fehler aus oben genannten Gründen auf drei "Kästchen" abgeschätzt:

$$B_1 = (0,12 \pm 0,03) \text{ s}^2 \quad (15)$$

$$B_2 = (0,08 \pm 0,03) \text{ s}^2 \quad (16)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (3) bis (6) wurden die folgenden Werte bestimmt:

$$\begin{aligned}D_1 &= (3,2 \pm 0,1) \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \\m_{1,F} &= (29 \pm 7) \text{ g} \\D_2 &= (3,46 \pm 0,09) \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \\m_{2,F} &= (21 \pm 8) \text{ g}\end{aligned}$$

Die Kontrollmessung der Federmasse mit Hilfe der Präzisionswaage ergab für die erste Feder $m'_{1,F} = (20,2 \pm 0,1) \text{ g}$ und für die zweite Feder $m'_{2,F} = (17,8 \pm 0,1) \text{ g}$. Die ermittelten Massen der ersten Feder stimmen innerhalb ihrer einfachen Fehler nicht überein. Die wahrscheinlichste Fehlerquelle ist die Bestimmung der Ausgleichsgeraden. Für die zweite Feder stimmen die ermittelten Feder-massen innerhalb ihrer Fehler überein.

Wie gerade beschrieben, lassen sich die Parameter einer Ausgleichsgerade sehr einfach über ein eingezeichnetes Steigungsdreieck bestimmen. Alternativ gibt es noch ein rechnerisches Verfahren, das im Dokument “Der Datenanalyse Primer 1” auf Seite 27 beschrieben ist. Dieses Dokument ist aus dem Uninetz (Rechner an der Uni oder über VPN) als Download zum Fortgeschrittenen Praktikum abrufbar¹. Dieses Verfahren soll nun als weitere Alternative verwendet werden.

Aus den drei Messpunkten jeder Kurve werden nun mathematisch die Parameter von Ausgleichsgerade nach der in “Der Datenanalyse Primer 1” auf Seite 27 beschriebenen Methode bestimmt werden. Da der mittlere Datenpunkt durch die Äquidistanz der Massen keine Auswirkung auf die Steigung hat, ergibt sich die Steigung allein als Gerade durch die beiden äußeren Punkte:

$$A_1 = \frac{y_{1,3} - y_{1,1}}{x_{1,3} - x_{1,1}} \quad (17)$$

$$= \frac{(1,96 \pm 0,03) \text{ s}^2 - (0,72 \pm 0,02) \text{ s}^2}{(148,8 \pm 0,1) \text{ g} - (49,6 \pm 0,1) \text{ g}} \quad (18)$$

$$= \frac{(1,24 \pm 0,04) \text{ s}^2}{(99,2 \pm 0,2) \text{ g}} \quad (19)$$

$$= (12,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}^2}{\text{g}} \quad (20)$$

$$A_2 = \frac{y_{2,3} - y_{2,1}}{x_{2,3} - x_{2,1}} \quad (21)$$

$$= \frac{(1,77 \pm 0,03) \text{ s}^2 - (0,64 \pm 0,02) \text{ s}^2}{(149,0 \pm 0,1) \text{ g} - (49,8 \pm 0,1) \text{ g}} \quad (22)$$

$$= \frac{(1,13 \pm 0,04) \text{ s}^2}{(99,2 \pm 0,2) \text{ g}} \quad (23)$$

$$= (11,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}^2}{\text{g}} \quad (24)$$

$$(25)$$

Die Fehler der Differenzen und Quotienten werden wie folgt berechnet:

$$\Delta(a - b) = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2} \quad (26)$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{\frac{\Delta a^2}{b^2} + \frac{a^2 \cdot \Delta b^2}{b^4}} \quad (27)$$

Die Achsenabschnitte werden nun ebenfalls nach einer Formel aus “Der Datenanalyse Primer 1” berechnet. Da sich die Fehler aller Messpunkte kaum unterscheiden, wird zur Vereinfachung angenommen sie wären konstant. Somit vereinfacht sich die Formel zu:

$$B_i = \bar{y}_i - A_i \cdot \bar{x}_i \quad (28)$$

$$\Delta B_i = \sqrt{\Delta \bar{y}_i^2 + \bar{x}_i^2 \Delta A_i^2 + \Delta \bar{x}_i^2 A_i^2} \quad (29)$$

Es ergeben sich die folgenden Werte:

$$B_1 = (0,11 \pm 0,05) \text{ s}^2 \quad (30)$$

$$B_2 = (0,07 \pm 0,05) \text{ s}^2 \quad (31)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (3) bis (6) wurden die folgenden Werte bestimmt:

$$D_1 = (3,2 \pm 0,1) \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$$m_{1,F} = (27 \pm 12) \text{ g}$$

$$D_2 = (3,5 \pm 0,1) \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$$m_{2,F} = (19 \pm 13) \text{ g}$$

Die Kontrollmessung der Federmasse mit Hilfe der Präzisionswaage ergab für die erste Feder $m'_{1,F} = (20,2 \pm 0,1) \text{ g}$ und für die zweite Feder $m'_{2,F} = (17,8 \pm 0,1) \text{ g}$. Innerhalb der (teilweise recht großen) Fehler stimmen die aus der Ausgleichsgeraden bestimmten Werte mit diesen Messungen überein. Die prozentual hohen Fehler sind das hauptsächlich das Resultat der mathematischen Bestimmung. Die beste Möglichkeit, diese zu reduzieren, ist die Durchführung weiterer Messungen, um mehr Datenpunkte verwenden zu können.

Gleich, welches der oben genannten Verfahren man anwendet, die Ergebnisse stimmen gut überein (was sie auch sollten). Die ermittelten und berechneten Fehler weichen dafür teilweise stark von einander ab. Dies soll an dieser Stelle aber nichts über die Genauigkeit der verwendeten Verfahren aussagen!!

Zusammenfassung

Den Abschluss eines Protokoll bildet immer eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse. Daneben wird auch kurz diskutiert, warum ein Versuch möglicherweise nicht funktioniert hat und wie man die Messung verbessern könnte. Im Rahmen dieses Beispielprotokolls werden nun die Ergebnisse der handschriftlichen Auswertung auf Millimeterpapier exemplarisch verwendet.

Die Messung der Federkonstanten über die Schwingungsdauer einer Federpendels wurde durchgeführt. Die Daten weisen den erwarteten linearen Verlauf auf. Die Federkonstanten konnten zu $D_1 = (3,2 \pm 0,1) \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ und $D_2 = (3,46 \pm 0,09) \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ bestimmt werden, die Federmassen zu $m_{1,F} = (29 \pm 7) \text{ g}$ und $m_{2,F} = (21 \pm 8) \text{ g}$. Zur Überprüfung der Analyse wurden die Federmassen auch mit der Präzisionswaage bestimmt, es ergaben sich $m'_{1,F} = (20,2 \pm 0,1) \text{ g}$ und $m'_{2,F} = (17,8 \pm 0,1) \text{ g}$. Die graphisch ermittelten Federmassen weisen einen vergleichbar großen Fehler auf. Dieser ist hauptsächlich die Folge des angenommenen Fehlers beim Ablesen des Achsenabschnittes und der Extrapolation der Geraden zu $m = 0 \text{ g}$. Dies lässt sich bei der verwendeten Methode nur schlecht reduzieren. Im Rahmen der Fehler ist die Übereinstimmung der Federmassenmessungen aber befriedigend und eine gute Bestätigung des Messverfahrens.

Dynamische Bestimmung der Federkonstanten

