BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Versuch M3
Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Biegung und dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls

5.06

I. Zielsetzung des Versuchs

Es soll eine Vorstellung von den materialspezifischen Größen Elastizitätsmodul und Torsionsmodul entwickelt werden. Zu diesem Zweck werden Sie die Elastizitätsmodule einiger Eisenstäbe bestimmen; die dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls erfolgt durch Drehschwingungen.

II. Vorkenntnisse

1) allgemeine Vorkenntnisse

Hooke'sches Gesetz, Trägheitsmoment, Steiner'scher Satz, Schwingungsgleichung.

Literatur: Jedes Lehrbuch der Physik, z.B.:
BERGMANN-SCHÄFER, Band 1;
BERKELEY, Band 1;
Alonso-Finn, Band 1;
POHL, Mechanik;
GERTHSEN.

2) spezielle Vorkenntnisse

Elastizitätsmodul, Torsionsmodul, Flächenträgheitsmoment, Biegung.

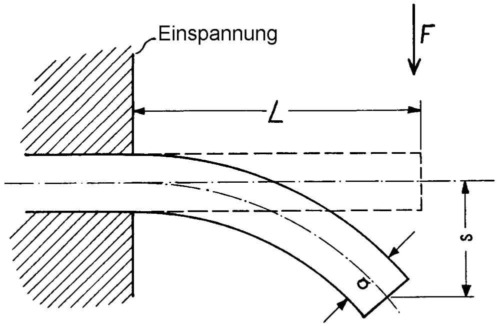
Literatur: BERGMANN-SCHÄFER, Band 1;
POHL, Mechanik;
GERTHSEN.

3) Fehlerrechnung

Literatur: WESTPHAL, Physikalisches Praktikum, Kap. 8 – 11, 12.I

III. Theorie zum Versuch

1) Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Biegung



Ein Metallstab der Länge L, Breite b und Dicke a ist an einem Ende fest eingeklemmt. Am anderen bewirkt eine zur Stabachse senkrecht wirkende Kraft F ein Drehmoment, welches eine Biegung des Stabes hervorruft. Die Absenkung s des Stabes heißt Biegungspfeil.

Bei einem solchen Vorgang wird der obere Teil des Stabes gedehnt, der untere gestaucht. Die Grenzschicht zwischen Stauchung und Dehnung heißt „neutrale Faser". Unter Berücksichtigung der folgenden Annahmen ergibt sich für den Biegungspfeil s in Abhängigkeit von der Kraft F:

1. Bei der Biegung bleiben rechteckige Querschnitte des Stabes in ihrer Form erhalten.
2. Die neutrale Faser liegt in der geometrischen Mitte.

$$s = \frac{L^3}{3\,E\,I}\,F \qquad \text{(Herleitung siehe Anhang)} \tag{1}$$

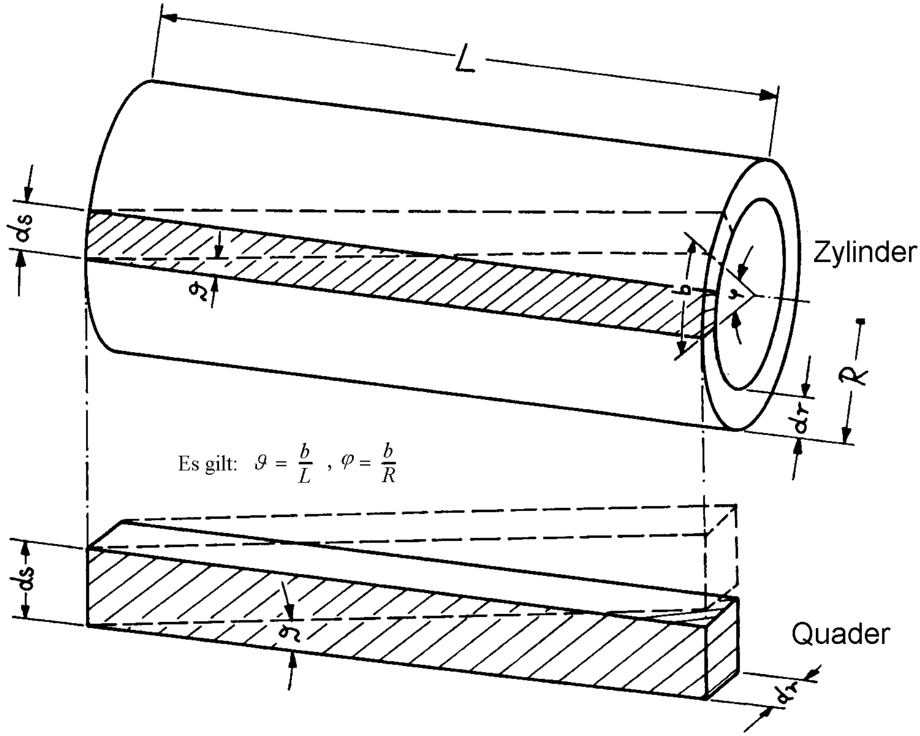
E = Elastizitätsmodul,
I = Flächenträgheitsmoment, wobei:

a) für einen rechteckigen Stab $I = \frac{1}{12}a^3 b$

b) für einen runden Stab $I = \frac{\pi}{4}R^4$ (R = Radius)

Ist die Kraft F bekannt, ergibt obige Gleichung einen Zusammenhang zwischen dem Biegungspfeil s und dem Elastizitätsmodul E.

2) Dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls



Ein Metalldraht mit der Länge L und dem Radius R wird durch ein äußeres Drehmoment M um den Winkel φ verdrillt.

Zur Berechnung von M zerlegen wir den Draht in dünnwandige Hohlzylinder der Länge L mit dem Radius r und der Wandstärke dr.

Auf einem solchen Zylinder betrachten wir einen schmalen Streifen der Breite ds. Dieser bildet näherungsweise einen Quader mit den Kantenlängen L, dr, ds. Beim Verdrillen um den Winkel φ wird durch Scherung um den Winkel ϑ aus dem Rechteck mit den Seiten L und ds ein Parallelogramm.

Nach dem Hookeschen Gesetz gilt für die Scherspannung T:

$$T = G\,\vartheta = G\,\frac{r}{L}\,\varphi \qquad \text{(G = Torsionsmodul)} \qquad (2)$$

Die an der Fläche $dr\ ds$ angreifende Tangentialkraft ist dann:

$$dF = G\ \frac{r}{L}\ \varphi\ dr\ ds = T\ dr\ ds \tag{3}$$

und das Drehmoment bezüglich der neutralen Faser

$$dM = dF\ r = G\ \frac{\varphi}{L}\ r^2\ dr\ ds \tag{4}$$

Durch Integration über ds erhält man das Drehmoment auf den Hohlzylinder

$$M_H = \frac{G}{L}\ \varphi\ 2\pi r^3\ dr \tag{5}$$

Durch Integration über dr erhält man das Drehmoment für den Draht

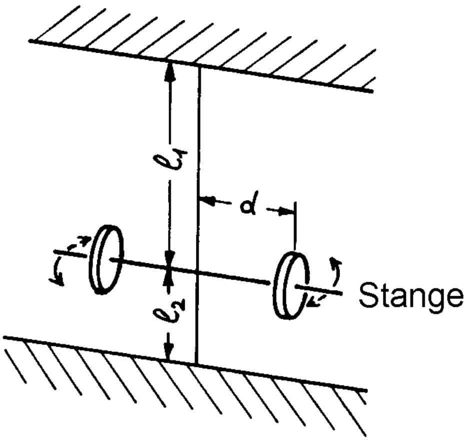
$$M = \pi\ G\frac{R^4}{2L}\ \varphi = D\ \varphi\ , \qquad D = \pi\ G\ \frac{R^4}{2L} \tag{6}$$

Werden — wie bei diesem Versuch — zwei Drähte des gleichen Materials und der gleicher Dicke mit den Längen l_1 und l_2 um den Winkel φ verdrillt, so ergibt sich für die Größe D :

$$D = D_1 + D_2 = \pi\ G\ \frac{R^4}{2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \tag{7}$$

d.h. man muß L durch die effektive Länge l_e ersetzen:

$$l_e = \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)^{-1} \tag{8}$$



Aufgrund des Drehmomentes $M = \theta\ddot{\varphi}$ vollführt der aufgehängte Körper (Stange + zylindrische Massenstücke) mit dem Trägheitsmoment θ harmonische Schwingungen nach der Schwingungsgleichung:

$$\theta\ddot{\varphi} + D\varphi = 0 \tag{9}$$

(Beachte: φ und $\ddot{\varphi}$ haben stets verschiedene Vorzeichen)

mit der Schwingungsdauer T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{D}} \tag{10}$$

Das Trägheitsmoment θ des aufgehängten Körpers setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment θ_S des Stabes und den äquatorialen Trägheitsmomenten θ_x der Massenstücke (Masse m), wenn die Schwerpunkte den gleichen Abstand von der Drehachse haben:

$$\theta = \theta_S + 2\left(\theta_x + md^2\right) \tag{11}$$

Damit erhält man eine Geradengleichung $T^2 = f\left(d^2\right)$, aus deren Anstieg sich das Torsionsmodul G berechnen läßt.

IV. Versuchsdurchführung

1) Zu: Bestimmung des Eleastizitätsmodules durch Biegung

1. Für zwei rechteckige Eisenstäbe und einen runden Eisenstab ist der Biegungspfeil s als Funktion der Kraft F im linearen Bereich zu messen. Die gemessenen Werte werden hierbei sofort graphisch aufgetragen. Beachten Sie die Nullage!

2. Aus der Steigung der Geraden für die rechteckigen Eisenstäbe ist jeweils das Elastizitätsmodul E (in N/mm^2) zu bestimmen. Fehlerrechnung.

3. Für den runden Eisenstab ist aus der Steigung der Geraden mit dem mittleren E aus 2. das Flächenträgheitsmoment I zu bestimmen und mit dem theoretisch berechneten Wert für I (siehe Anhang) zu vergleichen. Fehlerrechnung.

2) Zu: Dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls

4. Die Schwingungsdauer T wird für verschiedene Abstände d der Massenstücke von der Drehachse bestimmt und T^2 gegen d^2 aufgetragen. Hierbei sollte man T durch Messung der Zeit für mehrere Schwingungsperioden bestimmen (warum?).

5. Ebenso ist die Schwingungsdauer T_S des Stabes ohne Massenstücke zu bestimmen.
6. Aus der Steigung der Geraden $T^2 = f(d^2)$ ist G (in N/mm^2) zu bestimmen. Fehlerrechnung. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Tabellenwerten (z.B. GERTHSEN).
7. Bestimmen Sie aus den Achsenabschnitten der Geraden $(\theta_S + 2\theta_x)$.
8. Bestimmen Sie θ_S mit Hilfe der Messung von T_S und vergleichen Sie das Ergebnis für θ_x mit dem Wert, den Sie erhalten, indem Sie das äquatoriale Trägheitsmoment des Massenkörpers theoretisch nach der Gleichung

$$\theta = \frac{M}{4}\left(R_a^2 + R_i^2 + \frac{L'^2}{3}\right) \qquad \text{(Herleitung siehe Anhang)} \tag{12}$$

berechnen. (R_a= Außenradius, R_i = Innenradius, L' = Länge, M = Masse

V. Fehlerrechnung

1) Zur Bestimmung der Steigung der Geraden $s = f(F)$

Trotz sorgfältiger Justierung der Nullage können Sie aufgrund der Mechanik der Meßinstrumente einen systematischen Fehler beim Ablesen des Biegungspfeils s nicht immer vermeiden. Er wirkt sich derart aus, daß Ihre Gerade nicht wie erwartet durch den Nullpunkt gehen wird. Bei der Berechnung der Steigung hebt sich dieser systematische Fehler jedoch wieder heraus.

Berechnen Sie die Steigung und dessen Fehler, wie in WESTPHAL, Physikalisches Praktikum, Kap. 12.I., beschrieben.

2) Bestimmung des Fehlers des Elastizitätsmoduls E durch Fehlerfortpflanzung

Aus der Gleichung für den Biegungspfeil s erhält man für die Steigung der Geraden:

$$A = \frac{L^3}{3IE}, \quad I = \frac{1}{12}a^4 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{L^3}{3I}\,\frac{1}{A} = \frac{4L^3}{a^4}\,\frac{1}{A} \tag{13}$$

Sämtliche in dieser Gleichung auftretenden Größen sind fehlerbehaftet. In diesem Versuch sollen Sie nur die Fehlerfortplanzung in einem Potenzprodukt betrachten.

Die Fehler ΔL , Δa , ΔA gehen folgendermaßen in den Fehler von E ein:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{E}\sqrt{(\frac{\partial E}{\partial L}\Delta L)^2 + (\frac{\partial E}{\partial a}\Delta a)^2 + (\frac{\partial E}{\partial A}\Delta A)^2} \tag{14}$$

(siehe Gl. 5 Westphal)

$$= \sqrt{\frac{(\frac{12L^2}{a^4A}\Delta L)^2}{(\frac{4L^3}{a^4A})^2} + \frac{(-\frac{16L^3}{a^5A}\Delta a)^2}{(\frac{4L^3}{a^4A})^2} + \frac{(-\frac{4L^3}{a^4A^2}\Delta A)^2}{(\frac{4L^3}{a^4A})^2}} \tag{15}$$

$$= \sqrt{(3\frac{\Delta L}{L})^2 + (-4\frac{\Delta a}{a})^2 + (-1\frac{\Delta A}{A})^2} \tag{16}$$

(siehe Gl. 6 WESTPHAL: Fehlerfortpflanzung in einem Potenzprodukt)

Bestimmen Sie nach dieser Gleichung den Fehler von E.

Mit $I = \frac{L^3}{3AE}$ ergibt sich analog als relativer Fehler von I:

$$\frac{\Delta I}{I} = \sqrt{(3\frac{\Delta L}{L})^2 + (-\frac{\Delta E}{E})^2 + (-\frac{\Delta A}{A})^2} \tag{17}$$

3) Zur Bestimmung der Steigung der Geraden $T^2 = f(d^2)$

Wenden Sie zur Bestimmung der Steigung das in WESTPHAL, Kap. 12.I., beschriebene Verfahren an. Auf eine weitergehende Fehlerrechnung zur Bestimmung des Fehlers von G soll hier verzichtet werden, da sie nur mit einem größeren Aufwand und mit den Gleichungen der Fehlerfortpflanzungen möglich ist, die aber erst in einem späteren Versuch eingeführt werden.

Anhang A

Geräteliste:

1. Versuchstafel zur Biegung
   Zug- und Druckwaage
   Meßuhr
   Metallstäbe
   Maßstab
   Schieblehre

2. Torsionsgerät
   Maßstab
   Mikrometerschraube
   Stoppuhr
   Präzisionswaage
   zylindrische Gewichte
   Schieblehre

Anhang B

Berechnung von Träqheitsmomenten und Flächenträgheitsmomenten

Obwohl Trägheitsmomente und Flächenträgheitsmomente physikalisch völlig verschiedene Größen sind (Dimension!), haben sie doch ähnliche Bedeutung:

Trägheitsmoment $\theta = \int \bar{r}^2 dm = \varphi \int \bar{r}^2 dV$ (Dichte φ homogen)
beschreibt die Trägheit der Masse gegenüber Drehschwingungen,

Flächenträgheitsmoment $I = \int \bar{r}^2 dA$
beschreibt die „Trägheit“der Fläche gegenüber Verformungen.

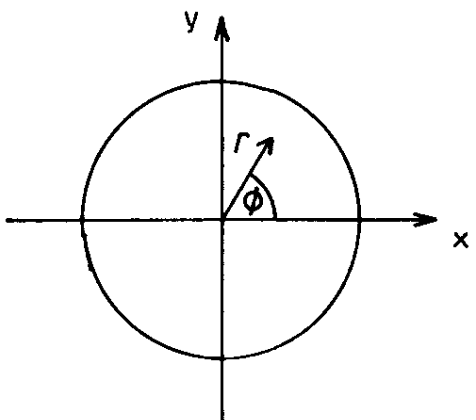
$\bar{r}$ ist jeweils der Abstand des Massenelementes dm (Flächenelementes dA) von der Drehachse (neutralen Faser).

Mathematisch bedeutet diese Ähnlichkeit gleiche Berechnungsweise mit dem einzigen Unterschied, daß θ ein Volumenintegral ist, I jedoch nur ein Flächenintegral!

Die Experimentalphysik-Lehrbücher berechnen meist θ und I nur für solche Spezialfälle, bei denen durch eine geschickte Einteilung die Volumen- bzw. Flächenintegrale auf eindimensionale Integrale zurückgeführt werden!

Zur allgemeinen, exakten Berechnung muß man jedoch die mehrdimensionalen Integrale lösen, was oft unmöglich ist. Die eleganteste Methode zur Vereinfachung der Integrale besteht nun darin, daß man ein Koordinatensystem wählt, welches der Geometrie des Problems möglichst angepaßt ist. So wird man z.B. zur Berechnung kreisförmiger Flächen Polarkoordinaten einführen:

$x = r \cos ø$
$y = r \sin ø$



Die mathematische Schwierigkeit besteht nun in der Transformation wichtiger Infinitesimalgrößen. Für alle wichtigen Koordinatensysteme findet man die Ergebnisse in Formelsammlungen. So ergibt sich für das Flächenelement dA in Polarkoordinaten:

$$dA = dx\ dy = r\ dr\ d\phi \tag{18}$$

Beispiele

a) Flächenträgheitsmoment einer Kreisfläche bezüglich einer äquatorialen neutralen Achse

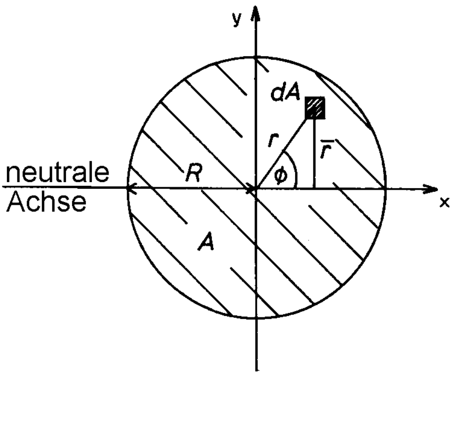
Nach den bisherigen neutralen Überlegungen erhalten wir:

$$I = \int_A \bar{r}^2\ dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \bar{r}^2\ r\ dr\ d\phi \tag{19}$$

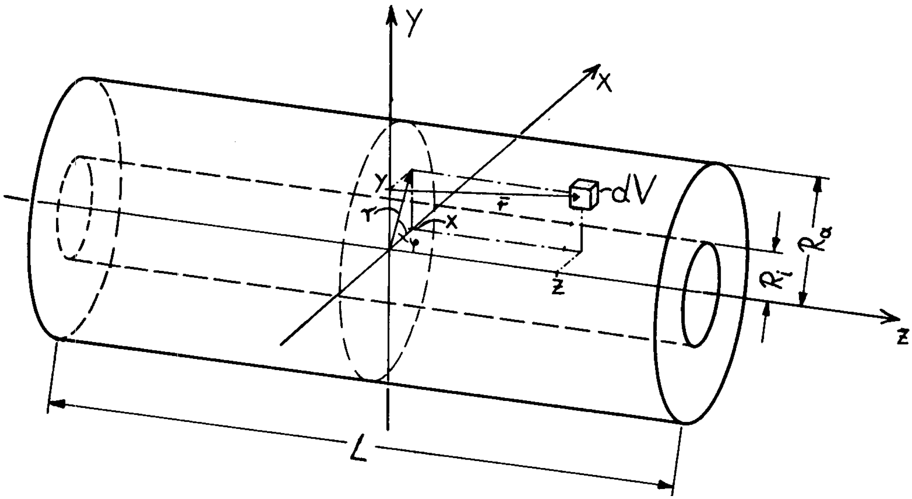
Der Abstand $\bar{r}$ des Flächenelementes von der neutralen Achse ist gerade $y = r \sin\phi$:

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi\, r^3\ \sin^2\phi \tag{20}$$

$$I = \frac{\pi}{4}\ R^4 \tag{21}$$



b) äquatoriales Trägheitsmoment eines Hohlzylinders



Hierbei sei die x-Achse die Drehachse.

Zur Vereinfachung des Integrationsproblems werden Zylinderkoordinaten eingeführt:

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

Damit ergibt sich für den senkrechten Abstand des Volumenelementes von der Drehachse:

$$\bar{r}^2 = y^2 + z^2 = r^2\sin^2\varphi + z^2 \tag{22}$$

Das Volumenelement dV mit der Masse dm läßt sich wie folgt darstellen:

$$dV = dx\ dy\ dz = r\ dr\ d\varphi\ dz \tag{23}$$

In diesen, dem Problem angepaßten, Koordinaten berechnet sich das äquatoriale Trägheitsmoment folgendermaßen:

$$\theta = \int \bar{r}^2 dm = \varrho \int_V \bar{r}^2 dV, \qquad \varrho \text{ = spez. Dichte} \tag{24}$$

$$\theta = \varrho \int_{Ri}^{Ra} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz\ (r^3\sin^2\varphi + rz^2) \tag{25}$$

$$\theta = \varrho \left\{ L \int_{Ri}^{Ra} dr\ r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi + 2\pi \int_{Ri}^{Ra} dr\ r \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dz\ z^2 \right\} \tag{26}$$

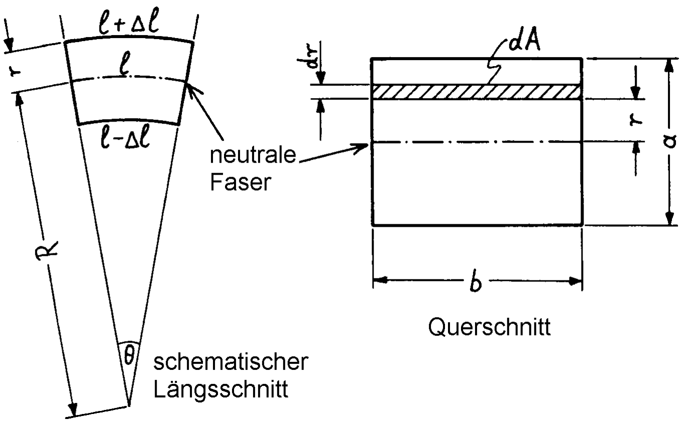
$$\theta = \varrho \left\{ L \frac{\pi}{4}(R_a^4 + R_i^4) + 2\pi\ \frac{L^3}{12} \frac{R_a^2 - R_i^2}{2} \right\} \tag{27}$$

Das Volumen des Hohlzylinders ist $V = \pi(R_a^2 - R_i^2)L$. Damit ist:

$$\theta = \frac{M}{4}(R_a^2 + R_i^2 + \frac{L^2}{3}) \tag{28}$$

c) Berechnung des Biegungspfeils s, vgl. Teil III.1)

Wir betrachten ein kleines Stück des Stabes an der Stelle x_0, das die Länge l hat, vgl. Skizze in Teil III.1) auf Seite 2:



Es gilt: $\frac{\Delta l}{1} = \frac{r}{R}$.

Man sieht, daß die Dehnung (Stauchung) mit dem Abstand von der neutralen Faser zunimmt.

Nach dem Hooke'schen Gesetz und der Definition von Spannung gilt für die Kraft auf das Flächenelement dA:

$$dF = E\,\frac{\Delta l}{l}\,dA = E\,\frac{r}{R}\,dA \tag{29}$$

Das Drehmoment dM bezüglich der neutralen Faser ist dann:

$$dM = \frac{E}{R}\,r^2\,dA \tag{30}$$

Durch Integration erhält man das Drehmoment auf das Stück l an der Stelle x_0 des Stabes:

$$M = \frac{E}{R}\int r^2\,dA = \frac{E}{R}\int r^2\,b\,dr = \frac{E}{R}\frac{1}{12}a^3\,b = \frac{E}{R}\,I \tag{31}$$

Die Größe I bezeichnet man in Analogie zum Trägheitsmoment als Flächenträgheitsmoment:

$$I = \int r^2\,dA \qquad \text{vgl. Teil III.1)} \tag{32}$$

Das Drehmoment M muß gleich dem durch die äußere Kraft F auf das Stück l wirkenden Drehmoment sein:

$$M = F(L - x_0) \tag{33}$$

Durch Vergleich mit Gl. (31) erhält man:

$$\frac{1}{R} = \frac{F}{EI}(L - x_0) \tag{34}$$

Für den Krümmungsradius einer Kurve $y = f(x)$ gilt:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{35}$$

Solange wir nur kleine Biegungen betrachten $L \gg s$, gilt in guter Näherung:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{36}$$

Damit erhält man für die Biegungskurve $s = y = f(x)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L - x) \tag{37}$$

Die Lösung durch zweimaliges Integrieren lautet:

$$y = \frac{F}{EI}(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + c_1x + c_2) \tag{38}$$

Wegen der Randbedingungen:

$y(0) = 0$ (dort, wo der Stab eingespannt ist, ist natürlich $s = 0$)

und $\frac{dy}{dx}(0) = 0$

gilt: $c_1 = c_2 = 0$.

Damit erhalten wir für für den Biegungspfeil s an der Stelle $x = L$:

$$s = \frac{L^3}{3EI}\;F \tag{39}$$