

## Versuch MI1

# Funktion eines Reflexklystrons und Ausbreitung von Mikrowellen

6.06

## I. Zielsetzung des Versuches

Ein System aus Mikrowellensender und verschiedenen Empfängern ermöglicht Untersuchungen verschiedener physikalischer Effekte an Mikrowellen. So sollen in diesem Versuch stehende Wellen vermessen werden, außerdem wird die Wirkung einer Wachs-Sammellinse oder eines Polfilters (parallele Metallstäbe) untersucht sowie die Reflexion an einer Wachsplatte (Brewster-Winkel), die Totalreflexion zwischen einer Wachs-Luft-Wachs-Schicht und die Drehung der Polarisationssebene durch „optisch aktive“ Substanzen (Spiralfedern in einem Styroporträger)

## II. Vorkenntnisse

Schwingkreis, Hohlraumresonator, Funktionsweise eines Reflexklystrons und einer Gunn-Diode;

Nachweis von Mikrowellen, Funktionsweise einer Gleichrichterdiode;

Elektromagnetische Wellen: eindimensionale ebene Wellen, stehende Wellen, Reflexion von Wellen, Brechung

### Literatur

BERKELEY: Physik-Kurs, Band III

FEYNMAN: Lectures in Physics, Vol. II, Chap. 20, 23, 24, 33; Vol. I, Chap. 29-33

RAMO, WHINNERY, VAN DUZER: Fields and Waves in Communication Electronics, Chap. 6, 7

GERTHSEN, KNESER, VOGEL: Physik

## III. Theorie zum Versuch/Versuchsbeschreibung

Anmerkung: Eine gewisse Schwierigkeit sind die in den verschiedenen Lehrbüchern verwendeten Maßsysteme. In der vorliegenden Versuchsbeschreibung ist das MKSA-System benutzt. Eine Umschreibung der Gleichungen in das cgs-System ist leicht möglich.

Aus dem genannten Grund ist im vorliegenden Fall der Versuch gemacht, die „Theorie“ in die Versuchsbeschreibung aufzunehmen. Das soll Sie aber nicht daran hindern, in die angegebene Literatur hineinzuschauen (spez. FEYNMAN). Die „Theorie“ ist trotz des beträchtlichen Umfangs der Versuchsbeschreibung doch recht knapp.

Mikrowellen, deren Eigenschaften in diesem Versuch untersucht werden, sind elektromagnetische Wellen mit Frequenzen im Bereich von etwa 1 GHz bis etwa 1000 GHz. Sie liegen im Spektrum der elektromagnetischen Wellen zwischen den Radiowellen (UKW ca. 100 MHz) und den Lichtwellen (fernere Infrarot:  $\lambda = 10^{-4}$  m, also 300 000 GHz). Es können deshalb viele Phänomene der Optik mit Mikrowellen demonstriert werden. Wegen der etwa 100000mal größeren Wellenlänge müssen nur die Meßaufbauten wesentlich größer und weiträumiger sein.

### 1) Funktionsweise eines Reflexklystrons

Vorbemerkung: In unserem Versuchsaufbau werden nicht mehr die alten Klystronsender verwendet, sondern neue Mikrowellensender, die anstelle eines Reflexklystrons eine Gunn-Diode haben. Bei diesen Sendern ist die Regelung einer Resonatorspannung nicht mehr möglich. Die entsprechenden Versuchsteile früherer Skripte entfallen. Die Theorie zur Funktionsweise des Reflexklystrons ist jedoch von grundsätzlicher physikalischer Bedeutung. Bevor wir uns den Eigenschaften der Wellen selbst zuwenden, wollen wir die Funktionsweise dieses Klystrons erläutern:

Abb. 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau:

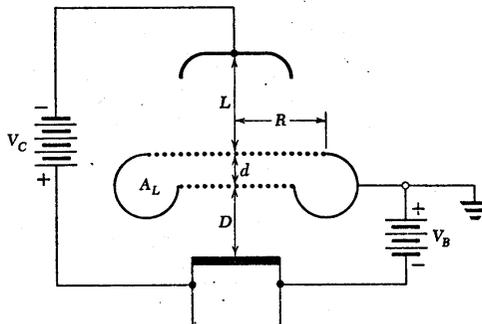


Abb.1

Die aus der Kathode austretenden Elektronen werden längs der Strecke  $D$  durch die Spannung  $V_B$  beschleunigt. Dabei erhalten sie die kinetische Energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = e V_B \tag{1}$$

Sie durchfliegen dann einen Hohlraumresonator, in dem sie entweder weiter beschleunigt oder aber abgebremst werden. Das hängt davon ab, welche Phase das in dem Resonator schwingende elektrische Feld bei Eintritt der Elektronen in den Resonator hat. Zeigt das Feld in Flugrichtung, werden sie abgebremst; zeigt es in die entgegengesetzte Richtung, so werden sie beschleunigt. Im ersten Fall geben sie Energie an das Feld ab, im zweiten nehmen sie Energie aus dem Feld auf.

Da pro Zeiteinheit stets gleichviele Elektronen den Resonator erreichen, nehmen sie — über die Zeit gemittelt — keine Energie aus dem Feld. Der Elektronenstrahl ist aber bei Verlassen des Resonators geschwindigkeitsmoduliert. Es gilt:

Sei die Wechselspannung zwischen den beiden Gittern des Resonators  $V_R$  mit

$$V_R = V_0 \sin \omega t \quad (2)$$

so ist die Änderung  $\Delta$  der kinetischen Energie der Elektronen  $eV_R$ .

Also

$$eV_R = \Delta\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) \quad (3)$$

Wenn  $V_R \ll V_B$ , so ist die Änderung der kinetischen Energie der Elektronen klein gegenüber der Energie selbst. Wir dürfen also die Änderung linear approximieren. Es gilt:

$$v = v_0 \left. \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dv} \right|_{v=v_0} = mv_0$$

Also

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) = m v_0 \Delta v$$

Zusammen mit (3) folgt

$$\Delta v = \frac{e}{mv_0} v_R \quad (4)$$

D.h. die Elektronen verlassen den Resonator mit Geschwindigkeiten

$$v = v_0 + \Delta v = v_0 + \frac{e}{mv_0} v_0 \sin \omega t \quad (5)$$

In dem Raum zwischen dem Hohlraumresonator und dem Reflektor werden die Elektronen durch das negative Potential des Reflektors gestoppt und umgelenkt. Dabei nähern sich die Elektronen, die eine große Geschwindigkeit (pos.  $\Delta v$ ) haben, dem Reflektor mehr als die, die eine kleine Geschwindigkeit (neg.  $\Delta v$ ) haben. Also legen die Elektronen mit der größeren Geschwindigkeit einen weiteren Weg zurück, bis sie wieder den Resonator erreichen, als die mit der kleineren Geschwindigkeit. Außerdem haben ja die Elektronen mit pos.  $\Delta v$  den Resonator eine halbe Schwingungsperiode früher verlassen als die mit neg.  $\Delta v$ . Dies führt dazu, daß alle Elektronen, die den Resonator während einer Schwingungsperiode durchflogen haben, nach Reflexion nahezu gleichzeitig in den Resonator eintreten. Das folgende Ort-Zeit-Diagramm veranschaulicht das. Aus einer Geschwindigkeitsmodulation ist eine Dichtemodulation geworden.

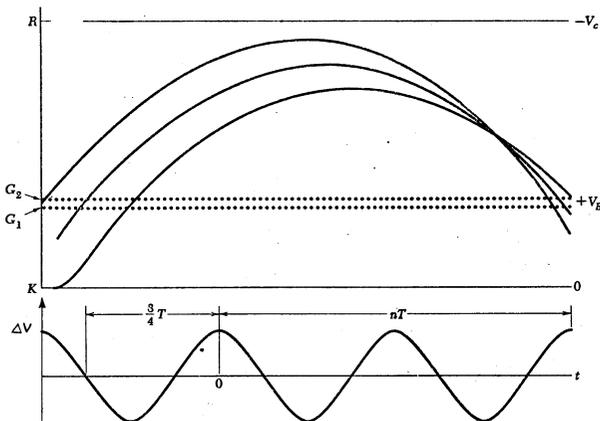


Abb. 2

Sei das Feld zwischen Resonator und Reflektor (s. Abb. 1)

$$E = \frac{V_B + V_C}{L} \quad (6)$$

so ist die Beschleunigung

$$a = -\frac{eE}{m} = -\frac{e}{m} \frac{V_B + V_C}{L} \quad (7)$$

Elektronen, die zur Zeit  $t_0$  am zweiten Gitter, das sich am Ort  $z = 0$  befindet, den Resonator verlassen, haben zur Zeit  $t > t_0$  die Geschwindigkeit

$$v = (v_0 + \Delta v) - \frac{e}{m} \frac{V_B + V_C}{L} (t - t_0) \quad (8)$$

und befinden sich am Ort

$$z = (v_0 + \Delta v)(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{V_B - V_C}{L} (t - t_0)^2 \quad (9)$$

Die Elektronen benötigen also für einen „Rundflug“ ( $z = 0$ )

$$t - t_0 = 2(v_0 + \Delta v) \frac{m}{e} \frac{L}{V_B + V_C} \quad (10)$$

d.h. Elektronen mit pos.  $\Delta v$  benötigen eine längere Zeit als Elektronen mit neg.  $\Delta v$ . Die Elektronen sammeln sich also um das Elektron, das den Resonator zu einer Zeit durchfliegt, in der das Feld einen Nulldurchgang mit negativer Steigung hat (s. Abb. 2)

Trifft der so „gebunchte“ Strahl auf den Hohlraumresonator, so ist die im zeitlichen Mittel an die Felder abgegebene Energie nicht mehr Null. Der Energieverlust des Elektronenstrahls bzw. der Energiegewinn des elektrischen Feldes ist maximal, wenn ein Bunch

zu einem solchen Zeitpunkt in den Resonator eintritt, an dem  $\Delta v$  ein Maximum hat, so daß die Elektronen maximal abgebremst werden. Aus Abb. 2 zusammen mit Gleichung (10) sieht man, daß mit  $\Delta v = 0$  (denn das gilt für das zentrale Elektron des Brunches) der Energieübertrag maximal ist für

$$t - t_0 = \frac{2mv_0}{e} \frac{L}{V_B + V_C} = \left(n + \frac{3}{4}\right)T \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

$T$  ist die Schwingungsdauer des elektrischen Feldes im Resonator.

Mit

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_B}{m}}$$

folgt

$$4 \frac{(V_A V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_B + V_C} = n + \frac{3}{4} \quad (12)$$

wobei

$$V_A = \frac{mL^2}{2eT^2}$$

eine charakteristische Größe für das Klystron ist.

Es gibt also zu jedem Wert  $V_B$  mehrere Werte von  $V_C$ , die abhängen von  $n$ .  $n$  heißt der Mode des Klystrons. Gleichung (12) ist in Abb. 3 für mehrere Werte von  $n$  aufgetragen.

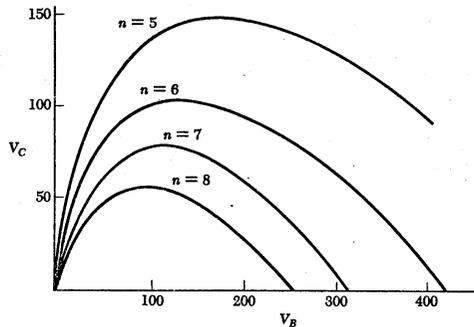


Abb. 3

Die von den Elektronen abgegebene Energie wird über eine Antenne aus dem Hohlraumresonator ausgekoppelt. Sie wird über eine Koaxialleitung einem Dipol zugeführt, der in einem rechteckigen Hohlleiter montiert ist. Dieser strahlt die Energie in Form von elektromagnetischen Wellen ab (Dipolstrahlung). In großer Entfernung vom Horn, in das der Hohlleiter endet, sind diese Wellen in guter Näherung als ebene Wellen anzusehen. Es sei hier darauf hingewiesen, daß die vom Dipol abgestrahlten Wellen *linear polarisiert* sind, d.h. der elektrische Vektor schwingt nur in einer Richtung.

Der Nachweis und Empfang von Mikrowellen geschieht im Prinzip ähnlich dem von Rundfunkwellen mit einem AM-Empfänger. Im vorliegenden Experiment werden Halbleiterdioden verwendet, die nur in einer Richtung leiten. Die einlaufende Welle induziert in einer Antenne einen Wechselstrom, der von der Diode gleichgerichtet wird. Es entsteht also über der Diode eine Gleichspannung, die von der Amplitude der einlaufenden Welle abhängt. Für kleine Amplituden von  $E$  der einlaufenden Welle ist die Gleichspannung proportional zu  $E^2$ , für große Amplituden wird sie proportional zu  $E$ . Da eine Stabantenne nur solche Wellen empfangen kann, deren elektrischer Vektor parallel zu ihr schwingt, kann sie zum Nachweis polarisierter Wellen verwendet werden.

## 2) Funktionsweise einer Gunn-Diode

Die Gunn-Diode ist in der 60er Jahren von John Battiscombe Gunn erfunden worden. Es handelt sich dabei um ein Halbleiter-Bauelement, bei dem der sogenannte Gunn-Effekt zur Erzeugung von Mikrowellen genutzt wird.

Eine Gunn-Diode besteht — anders als eine normale Halbleiterdiode — nur aus n-dotierten Halbleiterbereichen, meist GaAs (Galliumarsenid), GaN (Galliumnitrid) oder Indiumphosphid. In dieser Struktur lassen sich Mikrowellenoszillationen anregen, wenn man an den Kristall eine ausreichend hohe Spannung anlegt.

Die Kristallschichten sind hintereinander angeordnet und unterschiedlich stark dotiert. Durch eine geeignete Dotierung wird ein negativer Widerstand für Elektronen aufgebaut. Dadurch können unter bestimmten Bedingungen Elektronen sich „aufstauen“ und in Schüben (wie Wellen) durch die Diode wandern. Dieser Vorgang läuft mit Frequenzen im GHz-Bereich ab; technisch realisierbar sind 1,5 GHz bis über 100 GHz bei Leistungen, die bis zu 200 bis 300 mW betragen können.

Eine genaue Erklärung des Gunn-Effektes setzt weitergehende Kenntnisse in der Halbleiter- und Festkörperphysik voraus.

Auch bei unserem Sender mit der Gunn-Diode werden die Mikrowellen von einem Dipol abgestrahlt und sie sind daher ebenfalls linear polarisiert.

### 3) Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

#### a) Ausbreitung im Vakuum

Wir wenden uns nun den Eigenschaften der Mikrowellen zu und betrachten zunächst die Ausbreitung im freien Raum. Die Existenz elektromagnetischer Wellen ist zuerst als Folge aus den Maxwell'schen Gleichungen vorhergesagt worden. Diese lauten im Vakuum, d.h. ohne Ladung ( $\rho = 0$  und Ströme ( $\vec{j} = 0$ ):

$$\nabla \vec{E} = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (15)$$

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (16)$$

mit  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$  und  $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$ .

Diese Gleichungen sind symmetrisch in  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ . Die Gleichungen (15) und (16) sind gekoppelte Differentialgleichungen. Um eine Gleichung mit nur einer unbekanntem Feldstärke ( $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$ ) zu erhalten, geht man folgendermaßen vor:

Bilde die Rotation von Gleichung (15).

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Da aber nach Gl. (13) gilt:  $\nabla \vec{E} = 0$ , folgt:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Eine analoge Gleichung erhält man für  $\vec{B}$ , wenn man von Gleichung (16) ausgeht.

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

Jede Komponente von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  erfüllt also die Wellengleichung

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

Wir beschränken uns auf eindimensionale ebene Wellen. Das sind Wellen, die eine einheitliche Ausbreitungsrichtung haben, sagen wir die  $z$ -Achse, und bei denen keine der Komponenten von den Koordinaten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung abhängt, also z.B.  $\vec{E} = \vec{x}E_x(z, t) + \vec{y}E_y(z, t) + \vec{z}E_z(z, t)$  Die allgemeine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung kann durch eine Überlagerung von eindimensionalen Wellen aufgebaut werden. Die allgemeine Lösung von (19) für die eindimensionale Welle lautet

$$u = f(z - ct) + g(z + ct) \quad (20)$$

wobei  $f$  und  $g$  beliebige Funktionen sind.  $f$  beschreibt den Teil der Welle, der sich in Richtung der positiven  $z$ -Achse ausbreitet,  $g$  denjenigen, der sich in Richtung der negativen  $z$ -Achse ausbreitet.  $c$  ist die Phasengeschwindigkeit. Beschränken wir uns auf periodische Lösungen, so können wir die Welle beschreiben mit

$$u = A \cos(kz - \omega t) + B \cos(kz + \omega t) \quad (21)$$

oder

$$u = A \cos\left[k\left(z - \frac{\omega}{k}t\right)\right] + B \cos\left[k\left(z + \frac{\omega}{k}t\right)\right]$$

$$\text{mit } \frac{\omega}{k} = c, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

wie man durch Vergleich mit (20) sieht. Setzt man Gleichung (21) in Gleichung (19) ein, so erhält man die Dispersionsrelation

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (22)$$

In einer Wanderwelle gilt  $B \ll A$ , so daß wir den zweiten Term vernachlässigen können. Es gilt also für die elektrische Feldstärke

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos(kz - \omega t) \quad (23)$$

$$E_y(z, t) = E_{y0} \cos(kz - \omega t) \quad (24)$$

$$E_z(z, t) = \text{const.} \quad (\text{warum?}) \quad (25)$$

Die entsprechenden Gleichungen für die magnetische Feldstärke folgen aus den Gleichungen (15) und (16).

$$B_x(z, t) = -\frac{1}{c}E_{y0} \cos(kz - \omega t) \quad (26)$$

$$B_y(z, t) = -\frac{1}{c}E_{x0} \cos(kz - \omega t) \quad (27)$$

$$B_z(z, t) = \text{const.} \quad (28)$$

Eine solche Welle transportiert Energie, die Energiedichte ist

$$W = \frac{1}{2}(E^2 \varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0} B^2) \quad (29)$$

der Energiefluß ist nach dem Poynting'schen Theorem

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (30)$$

Trifft eine solche Welle senkrecht auf die Oberfläche eines guten Leiters, so wird sie reflektiert, d.h. es entsteht eine Welle, die sich in entgegengesetzter Richtung ausbreitet. Diese Welle trägt die gesamte von der einlaufenden Welle mitgeführte Energie zurück, so daß hinter dem Leiter keine Energie nachweisbar ist.

Also gilt für die Überlagerung der Wellen:

$$E_x = E_x^{hin} + E_x^{rueck} = E_{x0} \cos(kz - \omega t) + E'_{x0} \cos(-kz - \omega t) \quad (31)$$

Die Randbedingung, daß am Ort des Leiters, den wir als  $z = 0$  definieren wollen, für alle Zeiten  $t$ ,  $E_x$  verschwinden muß, verlangt

$$E_{x0} = -E'_{x0}$$

Wegen  $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$  gilt

$$E_x = 2E_{x0} \sin kz \sin \omega t \quad (32)$$

$$E_y = 2E_{y0} \sin kz \sin \omega t \quad (33)$$

Wie oben erhält man aus den Gleichungen (15) und (16)

$$B_x = \frac{2}{c} E_{y0} \cos kz \cos \omega t \quad (34)$$

$$B_y = \frac{2}{c} E_{x0} \cos kz \cos \omega t \quad (35)$$

Dies sind die Gleichungen für eine stehende Welle. Ihre Maxima und Minima sind ortsfest. Im Gegensatz zur Wanderwelle sind hier die Felder  $E$  und  $B$  um  $90^\circ$  (oder  $\pi/2$ ) phasenverschoben. Der Energiefluß über die Zeit gemittelt verschwindet: die Energie schwingt mit der Frequenz  $2\omega$  vor und zurück, und zwar um die Strecke  $\lambda/4$ ; das eine Mal ist sie rein elektrisch,  $\lambda/4$  entfernt rein magnetisch.

Es ist üblich, für Wellen die komplexe Schreibweise zu benutzen. Dabei gilt, daß die physikalischen Felder die Realteile der komplexen Größen sind. Gleichzeitig verallgemeinern wir unsere bisherige Beschreibung der ebenen eindimensionalen Wellen auf ebene dreidimensionale Wellen. Die Ausbreitungsrichtung ist nicht mehr die  $z$ -Achse, sondern die Welle breitet sich in Richtung des Wellenzahlvektors  $\vec{k}$  aus.

Die Gleichungen für eine Wanderwelle lauten dann:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\varepsilon}_1 E_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (36)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\varepsilon}_2 B_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (37)$$

Dabei ist  $\vec{x}$  der Ortsvektor,  $\varepsilon_1$ , und  $\varepsilon_2$  sind konstante reelle Einheitsvektoren.  $E_0$  und  $B_0$  sind komplexe Amplituden.

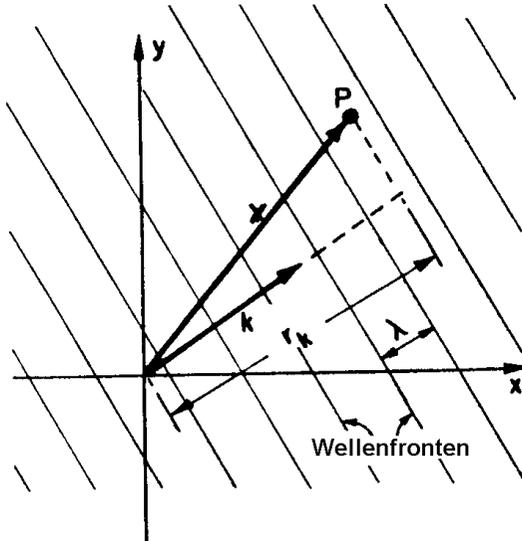


Abb. 4

Für eine Welle, die sich in Richtung  $k$  bewegt, ist die Phase an jedem Punkt P:  $-(\omega t - kx)$ .

Zeigen Sie, daß die Wellen transversal polarisiert sind, d.h.  $\varepsilon_1 \vec{k} = 0$  und  $\varepsilon_2 \vec{k}$  (Dies folgt aus  $\nabla \vec{E} = 0$  und  $\nabla \vec{B} = 0$ ).

Ferner gilt nach (14) und (15)

$$\vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{k} \times \vec{\varepsilon}_1}{|\vec{k}|} \quad (38)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (39)$$

## b) Ausbreitung im Dielektrikum

Betrachten wir nun die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem linear isotropen homogenen dispersionsfreien Medium. Dazu schreiben wir zunächst die Maxwell'schen Gleichungen in ihrer allgemeinen Form auf:

$$\nabla \vec{D} = \nabla(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{frei} \quad (40)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (41)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (42)$$

$$\varepsilon_0 c^2 \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_{frei} + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (43)$$

Wenn es keine freien Ladungen und Ströme gibt, gilt  $\vec{\rho}_{frei} = 0$  und  $\vec{j}_{frei} = 0$

Das Dielektrikum sei linearisotrop, also

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

und entsprechend  $\vec{M} = \chi_M \vec{H}$ .

Aus historischen Gründen steht hier  $H$  anstelle von  $B$ , deshalb:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_M)\vec{H} = \mu \vec{H}$$

Ferner gilt:  $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ .

Das Medium sei homogen, d.h.  $\varepsilon$  und  $\mu$  hängen nicht von  $x, y, z$  ab. Darum heißen die Gleichungen

$$\nabla \vec{E} = 0$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Daraus folgt die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (44)$$

analog für  $\vec{B}$ . Elektromagnetische Wellen breiten sich also in einem Dielektrikum mit einer Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  aus, die sich nach

$$\frac{1}{v_{ph}^2} = \mu \varepsilon \quad \text{also} \quad v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (45)$$

berechnet.

Der Brechungsindex  $n$  ist definiert als

$$n = \frac{c}{v_{ph}} \quad (46)$$

Mit (42) folgt also

$$n = c \sqrt{\mu\varepsilon} \quad (47)$$

Wir schreiben die Lösung von (44) in der Form (36)

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon} E_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

Für  $e$ -Funktionen dieser Art verifiziert man leicht die Rechenregel

$$\nabla \longrightarrow +i\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega$$

Einsetzen der Lösung (36) in die Wellengleichung (44) liefert die Dispersionsrelation

$$-k^2 + \mu\varepsilon \omega^2 = 0 \quad (48)$$

Mit (45) und (46) folgt

$$-k^2 + \frac{n^2}{c^2} \omega^2 = 0 \quad (49)$$

(vgl. Gl. (22))

Betrachten wir nun eine ebene Welle, die auf ein homogenes dispersionsfreies Dielektrikum trifft. Dieses habe die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_2$  und die Permeabilität  $\mu_2$ , das Medium, in dem sich die Welle zuvor ausbreitet, habe  $\varepsilon_1$  und  $\mu_1$ . (Wenn die Welle aus dem Vakuum (oder Luft) auf das Dielektrikum trifft, ist  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\mu_0}{\mu_1} = 1$ )

Der Wellenvektor  $\vec{k}$  bilde mit der Flächennormalen der Grenzfläche den Einfallswinkel  $\theta_i$ . Es entsteht dann eine reflektierte Welle, die mit dem Einfallslot den Winkel  $\theta_r$  bildet, und eine ins Dielektrikum eindringende Welle, die sich unter dem Winkel  $\theta_t$  zur Flächennormalen ausbreitet. Ferner gelten die Bezeichnungen von Abb. 5.

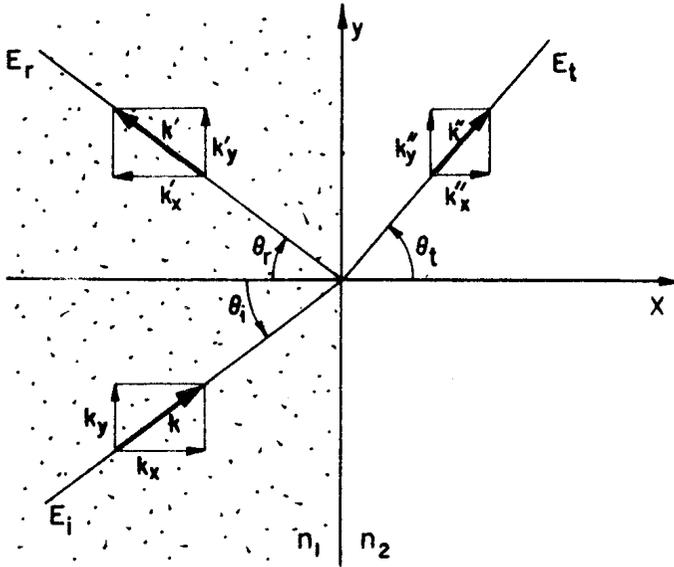


Abb. 5: Die Ausbreitungsvektoren  $k$ ,  $k'$  und  $k''$  für die einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen.

Die Wellengleichungen für die einzelnen Wellen lauten

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= \vec{\epsilon} E_{i0} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} = \vec{\epsilon} E_{i0} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ \vec{E}_r &= \vec{\epsilon}' E_{r0} e^{i(\vec{k}'\vec{x} - \omega t)} \\ \vec{E}_t &= \vec{\epsilon}'' E_{t0} e^{i(\vec{k}''\vec{x} - \omega t)}\end{aligned}\quad (50)$$

$\vec{B}$  berechnet sich aus (14).

$$\begin{aligned}\vec{B}_i &= \frac{\vec{k} \times \vec{E}_i}{\omega} \\ \vec{B}_r &= \frac{\vec{k}' \times \vec{E}_r}{\omega} \\ \vec{B}_t &= \frac{\vec{k}'' \times \vec{E}_t}{\omega}\end{aligned}\quad (51)$$

Stets gilt  $\vec{k}\vec{E} = 0$ .

Es gelten folgende Randbedingungen:

Für alle Punkte mit  $x = 0$  müssen die Wellen für alle Zeit die gleiche Phase haben, also

$$(\vec{k}\vec{x})_{x=0} = (\vec{k}'\vec{x})_{x=0} = (\vec{k}''\vec{x})_{x=0}\quad (52)$$

Daraus folgt, daß alle drei Wellen in einer Ebene liegen, der Einfallsebene. Dies sei die  $x$ - $y$ -Ebene und  $\vec{x}$  sei ein Einheitsvektor in  $y$ -Richtung. Dann folgt aus (38):

$$k \cos(90^\circ - \theta_i) = k' \cos(90^\circ - \theta_r) = k'' \cos(90^\circ - \theta_t)$$

$$k \sin \theta_i = k' \sin \theta_r = k'' \sin \theta_t, \quad k = |\vec{k}| \quad (53)$$

Also, da  $\vec{k}$  und  $\vec{k}'$  im gleichen Medium liegen

$$k = k' \quad \Rightarrow \quad \theta_i = \theta_r$$

Der zweite Teil der Gleichung (53) besagt

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k''}{k} = \frac{\omega n_2}{c} \frac{c}{\omega n_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (54)$$

Dies ist das Snellius'sche Brechungsgesetz.

Betrachten wir als Anwendungsbeispiel die Totalreflexion. Sei  $n_1 > n_2$ , so folgt  $\theta_t > \theta_i$ .  $\theta_t$  kann maximal  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$  werden, dann hat  $\theta_i$  einen Wert  $\theta_t < 90^\circ$ .

Es gilt:  $\theta_T = \arcsin(\frac{n_2}{n_1})$

Was passiert, wenn  $\theta_i > \theta_T$ ?

Nach (54) gilt

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

Mit  $\theta_i > \arcsin(\frac{n_2}{n_1})$  wird  $\sin \theta_t > 1$ . Das wiederum bedeutet, daß  $\theta_t$  ein komplexer Winkel ist, dessen Kosinus rein imaginär ist, damit  $\sin^2 \theta_t + \cos^2 \theta_t = 1$  gilt. Das gilt auch für komplexe Winkel:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi})$$

Also

$$\cos \theta_t = i \sqrt{\sin^2 \theta_t - 1} = i \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}$$

Die Bedeutung des rein imaginären Kosinus wird klar, wenn wir die Lösung der Wellengleichung hinschreiben:

$$E_t = \bar{\varepsilon}'' E_{t0} e^{i(k''x - \omega t)}$$

Es gilt: ( $\vec{x}$  ist der Ortsvektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ );  $\vec{k}'' = k'' \begin{pmatrix} \cos \theta_t \\ \sin \theta_t \end{pmatrix}$  mit  $k'' = |\vec{k}''|$ )

$$e^{i(\vec{k}'' \vec{x})} = e^{ik''(x \cos \theta_t + y \sin \theta_t)} = \exp \left\{ -k'' x \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1 \right\} \exp \left\{ ik'' y \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right\}$$

D.h. die Welle  $E_t$  klingt mit zunehmendem  $x$  exponentiell ab. Da die Wurzel in der Größenordnung von 1 ist und  $k'' \approx \frac{\omega}{c} \approx \frac{2\pi}{\lambda}$  ( $n \approx 1$ ) folgt, daß die Abklingkonstanten in der Größenordnung von der freien Wellenlänge ist. Wenn sich also (s. Abb. 5) im rechten Halbraum nur ein Medium mit dem Brechungsindex  $n_2$  befindet, so gibt es nur eine reflektierte Welle. Bringt man aber an eine Stelle  $x \leq \lambda$  ein Dielektrikum mit einem Brechungsindex  $n \cong n_1$ , so daß nur ein Spalt mit dem Medium 2 ausgefüllt ist, so läuft die Welle  $E_t$  in diesem Dielektrikum mit einer von der Spaltbreite abhängigen Intensität weiter.

## 4) Polarisation elektromagnetischer Wellen

### a) Lineare und zirkulare Polarisation

Bei der Beschreibung des Reflexklystrons hatten wir gesehen, daß die Mikrowellen, die das Horn verlassen, ebene transversal polarisierte Wellen sind. Wir beschreiben solche Wellen mit

$$\vec{E}_1 = \vec{\varepsilon}_1 E_1 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (55)$$

und sagen, die Welle ist linear polarisiert mit dem Polarisationsvektor  $\vec{\varepsilon}_1$ .

Um die Beschreibung der Polarisation allgemeiner zu machen, benötigt man eine zweite linear polarisierte Welle

$$\vec{E}_2 = \vec{\varepsilon}_2 E_2 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (56)$$

so daß  $\vec{\varepsilon}_1$ ,  $\vec{\varepsilon}_2$  und  $\vec{k}$  den Raum aufspannen.

$E_1$  und  $E_2$  sind komplexe Amplituden, von der Form  $E_i = E_{i0} e^{i\alpha_i}$  ( $E_{i0}$  reell), da die Wellen eine Phasendifferenz haben können. Die allgemeine Form einer ebenen Welle, die sich in Richtung von  $\vec{k}$  ausbreitet, ist

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (\vec{\varepsilon}_1 E_1 + \vec{\varepsilon}_2 E_2) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (57)$$

Falls  $E_1$  und  $E_2$  die gleiche Phase haben, stellt dies eine linear polarisierte Welle dar.

Der Polarisationsvektor dieser Welle schließt mit  $\vec{\varepsilon}_1$  den Winkel  $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{E_2}{E_1} \right)$  ein.

Die Amplitude der Welle ist  $E^2 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$

Wenn  $E_1$  und  $E_2$  nicht die gleiche Phase haben, so heißt die Welle elliptisch polarisiert. Ein Spezialfall davon ist die zirkulare Polarisation, für die gilt:  $E_1$  und  $E_2$  haben die gleichen Amplituden, aber eine Phasendifferenz von  $90^\circ$ . Dann gilt:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 (\vec{\varepsilon}_1 \pm i\vec{\varepsilon}_2) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (58)$$

wobei  $E_0$  die gemeinsame reelle Amplitude ist.

Nehmen wir an, die Welle breite sich in  $z$ -Richtung aus, und  $\vec{\varepsilon}_1$  und  $\vec{\varepsilon}_2$  lägen in  $x$ -bzw.  $y$ -Richtung, dann heißen die Komponenten des physikalisch existierenden Feldvektors

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \tag{59}$$

$$E_y(z, t) = \mp E_0 \sin(kz - \omega t)$$

An einem festen Ort ist der elektrische Feldvektor in seiner Amplitude konstant, rotiert aber mit der Frequenz  $\omega$ . Die Spitze des Feldvektors beschreibt einen Kreis. Im Falle des oberen Vorzeichens ( $\vec{\varepsilon} + i\vec{\varepsilon}$ ) rotiert  $\vec{E}$  entgegen dem Uhrzeiger, die Welle heißt links-zirkular polarisiert (positive Helizität), im anderen Falle rechts-zirkular polarisiert (neg. Helizität).

Für das Experiment bedeutet das folgendes: Liegt eine linear polarisierte Welle vor, deren Ausbreitungsrichtung die  $z$ -Achse ist und deren elektrischer Feldvektor in  $y$ -Richtung zeigt, so nimmt die vom Hornempfänger gemessene Intensität ab und wird schließlich Null, wenn man den Hornempfänger um die  $z$ -Achse aus der  $y$ -Richtung in die  $x$ -Richtung dreht. Liegt hingegen eine zirkular polarisierte Welle vor, so zeigt der Hornempfänger für jeden Drehwinkel die gleiche Intensität.

Sender und Hornempfänger verhalten sich wie Polarisator und Analysator in der Optik.

### b) Optische Aktivität

Ein anderes aus der Optik bekanntes Phänomen, das sich mit Mikrowellen leicht veranschaulichen läßt, ist die „optische Aktivität“. Damit ist gemeint, daß einige Substanzen, (z.B. Zuckerlösung) die Eigenschaft besitzen, die Polarisationsebene um die Ausbreitungsrichtung zu drehen. Die mathematische Behandlung dieses Phänomens ist sehr schwierig. Im folgenden ist der Versuch gemacht, den Effekt rein qualitativ zu veranschaulichen.

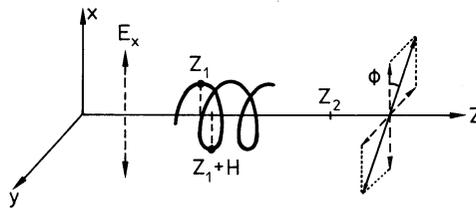


Abb.6

Eine in  $x$ -Richtung polarisierte Welle treffe auf eine metallische Spirale. Dabei induziert sie in der Spirale einen Wechselstrom. Dieser Strom hat sowohl Komponenten in Richtung der  $x$ -Achse als auch in Richtung der  $y$ -Achse. Gerade diese Komponente strahlt aber ein elektrisches Feld  $E_y$  ab, das in  $y$ -Richtung polarisiert ist. Denn die von der Spirale in den Punkten  $Z_1$  und  $Z_1 + H$  abgestrahlten Wellen haben im Punkt  $Z_2$  eine von  $\pi$

etwas verschiedene Phasenverschiebung, da der Abstand von  $Z_1$  und  $Z_2$  größer ist als von  $Z_1 + H$  und  $Z_2$ . Deshalb heben sich diese Wellen nicht auf, vielmehr bleibt eine kleine Komponente  $E_y$ , die sich dem elektrischen Feld  $E_x$ , für das man gleiche Überlegungen anstellen kann, überlagert. Man erwartet im Punkt  $Z_2$  also eine Welle, deren Polarisationssebene gegenüber der der einfallenden Welle um einen Winkel  $\phi$  gedreht ist. Nun läßt sich diese Überlegung auch durchführen, wenn die Achse der Spirale nicht wie hier parallel zur  $z$ -Achse verläuft, sondern in Richtung der  $x$ - oder  $y$ -Achse. Jedesmal ergibt sich die gleiche Drehrichtung. Dies ist schon deshalb zu erwarten, da ja die Moleküle einer Zuckerlösung (die auch eine spiralförmige Struktur haben) nicht alle orientiert sind,

### c) Reflexion und Brechung

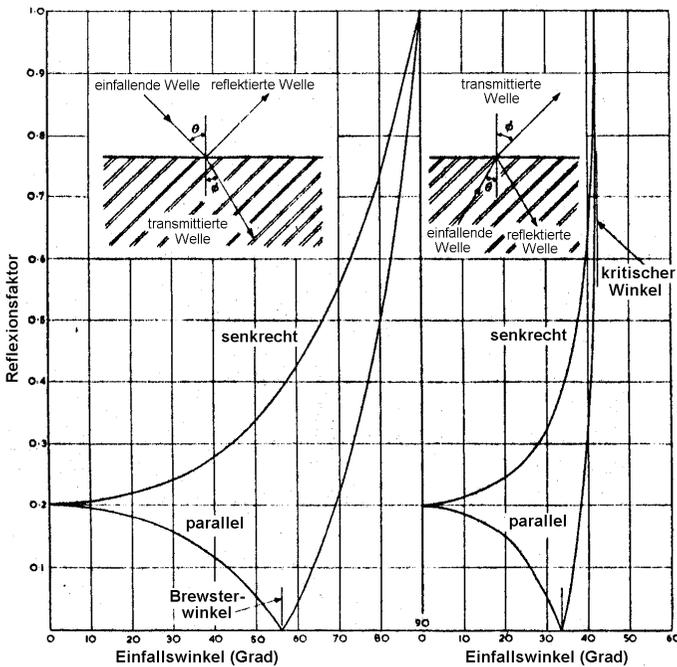


Abb. 7: Reflexion und Brechung an einer dielektrischen Grenzschicht. Die Kurven gelten für Polarisation parallel bzw. senkrecht zur Einfallsebene bei einer Dielektrizitätskonstante von 2,25. Der linke Teil des Diagramms gilt für eine in das Dielektrikum einfallende Welle, der rechte Teil für eine aus dem Dielektrikum austretende Welle.

Wir wollen hier nur auf das Brewstersche Gesetz eingehen, da es eine einfache Methode zur Bestimmung des Brechungsindex liefert. (Es sei vorausgesetzt, daß die Substanz, deren Brechungsindex bestimmt werden soll, nicht oder nur schwach absorbierend ist.) Die einfallende Welle sei parallel zur Einfallsebene (diese Ebene wird aufgespannt von

der Normalen der reflektierenden Fläche und dem Wellenvektor der einfallenden Welle) polarisiert. Mißt man die Intensität der reflektierten Welle in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\theta$  (= Reflektionswinkel), so findet man, daß diese für einen bestimmten Winkel verschwindet. Dieser Winkel ist gegeben durch

$$\tan \theta = n \tag{60}$$

wenn  $n$  der Brechungsindex ist.

## IV. Versuchsdurchführung

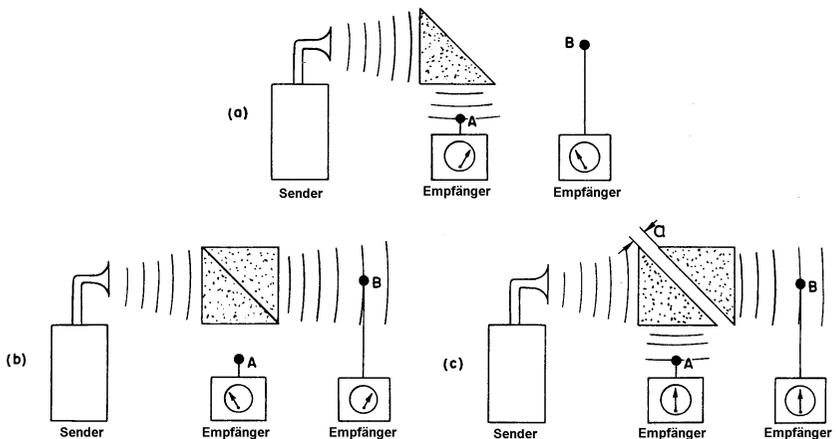
### Allgemeine Hinweise:

Die Mikrowellensender werden mit einer Gleichspannung von ca. 10 bis 12 V versorgt. Polung beachten und niemals höhere Spannungen anlegen!

Niemals darf an die Mikrowellenempfänger versehentlich eine Gleichspannung angelegt werden! Das würde die empfindliche Diode sofort zerstören.

### Aufgaben

1. Stellen Sie den Sender und eine Metallplatte im Abstand von ca. 30 - 40 cm gegenüber auf und zwischen beide die Diode. Stellen Sie so eine stehende Welle her und messen Sie durch Verschieben der Metallplatte die Wellenlänge.
2. Überzeugen Sie sich von den Eigenschaften einer Sammellinse, indem die Intensitätsverteilung senkrecht zur Strahlrichtung mit dem Hornempfänger messen:
  - a) ohne Linse (Abstand Sender-Empfänger ca. 1,5 m)
  - b) mit Linse (Abstand Sender-Linse 0,5 m, Linse-Empfänger 1 m)
3. Zeigen Sie die Totalreflexion anhand des folgenden Versuchs:



Stellen Sie die Wachsprismen ( $n = 1,5$ ) wie in der Abbildung (c) gezeichnet im Abstand  $a$  gegenüber. Messen Sie die Intensität des Empfängers in Abhängigkeit von Abstand  $a$ . Versuchen Sie, die Erscheinung zu erklären.

4. Stellen Sie Sender und Empfänger gegenüber, so daß die Polarisationsrichtungen (Richtungen, in denen der  $E$ -Vektor schwingt) der beiden parallel sind. Drehen Sie dann den Empfänger um die Verbindungslinie vom Sender und Empfänger und messen Sie dabei die Intensität in Abhängigkeit vom Drehwinkel.
5. Stellen Sie Sender und Empfänger um  $90^\circ$  gedreht gegenüber. Halten Sie dann ein Gitter zwischen Sender und Empfänger, so daß die Stäbe mit dem  $E$ -Vektor einen Winkel von  $45^\circ$  bilden.
6. Messen Sie die Intensität der von einer Wachsplatte reflektierten Wellen, die parallel zur Einfallsebene polarisiert sind, in Abhängigkeit vom Einfallswinkel. Bestimmen Sie den Brechungsindex.
7. Zeigen Sie die Drehung der Polarisationssebene durch „optisch aktive“ Substanzen. Es gibt dazu zwei Sorten optisch aktiver Substanz, nämlich Federn in Styroporplatten, mit Links- bzw. Rechtsschraube. Die Platten sind durch eine Markierung (L und R) an der Seite der Styroporplatten einfach zu unterscheiden.