BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Physikalisches Praktikum
für Studenten der Chemie und Lebensmittelchemie

Versuch AP6

Der Prismenspektralapparat

6.2015 / Ch-AP2, 12.04

I. Voraussetzungen

Brechungsgesetz, Durchgang des Lichts beim Prisma,
Minimalablenkung, Dispersion, Winkeldispersion,
Aufbau eines Prismenspektralapparates, Auflösungsvermögen,
Lichtemission und -absorption von Gasen.

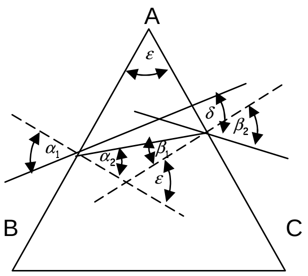
II. Literaturhinweise

Walcher: Praktikum der Physik, S. 152 ff.
Westphal: Physikalisches Praktikum, S. 138 ff.
Illberg: Physikalisches Praktikum, S. 296 ff.
Kohlrausch: Praktische Physik I, S. 432 ff., S. 526 ff.
Bergmann-Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik III, S. 44 ff.
Gerthsen-Kneser-Vogel: Physik, S. 481 ff.
Grimsehl: Lehrbuch der Experimentalphysik III, S. 57 ff., S. 104 ff.
Pohl: Einführung in die Physik III, S. 11 ff., S. 175 ff.

III. Grundlagen

1. Minimaler Ablenkungswinkel und Brechungsindex

Unter einem optischen Prisma versteht man einen durchsichtigen Körper mit zwei ebenen Begrenzungsflächen, die einen Winkel ε miteinander einschließen. Dieser Winkel heißt brechender Winkel, und die Kante, in der die beiden Ebenen zusammentreffen, wird brechende Kante genannt.



In Abb. 1 tritt ein Lichtstrahl auf die Fläche AB eines Prismas mit dem Brechungsindex n und wird dort mit dem Winkel α_2 gebrochen. An die Grenzfläche AC trifft er unter dem Winkel β_1. Schließlich verlässt er das Prisma im Winkel β_2. Der gesamte Ablenkwinkel δ lautet somit:

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 - \beta_1 \tag{1}$$

Da andererseits

$$\epsilon = \alpha_2 + \beta_1 \tag{2}$$

erhält man:

$$\delta = \alpha_1 + \beta_2 - \varepsilon \tag{3}$$

Berücksichtigt man schließlich, dass

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = n = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta 1} \tag{4}$$

so ergibt sich mit (2):

$$\delta = \alpha_1 - \varepsilon + \arcsin\{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1}\ \sin\varepsilon \quad - \quad \sin\alpha_1\cos\varepsilon\} \tag{5}$$

Der Ablenkwinkel δ hängt also neben den Prismengrößen n und ε nur noch vom Einfallswinkel α_1 ab. Es lässt sich nun zeigen, dass δ genau dann ein Minimum δ_{min} annimmt, wenn $\alpha_1 = \beta_2$ und $\alpha_2 = \beta_1$ ist, d.h. wenn der Lichtstrahl das Prisma symmetrisch durchsetzt. Zwischen dem minimalen Ablenkwinkel δ_{min} und dem Brechungsindex n gilt folgender Zusammenhang:

$$n = \frac{\sin\frac{\varepsilon+\delta_{min}}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} \tag{6}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich der Brechungsindex des Prismas bestimmen.

Der Brechungsindex n eines Mediums ist eine Funktion der Wellenlänge λ des Lichtes: $n = n(\lambda)$.

Die Änderung ist gegeben durch die Ableitung

$$\frac{dn}{d\lambda} = D \tag{7}$$

Sie wird als die physikalische Dispersion D bezeichnet. In vielen Fällen lässt sich der Brechungsindex durch folgenden empirischen Ansatz beschreiben:

$$n(\lambda) = n_0 + \frac{a}{\lambda - \lambda_0} \tag{8}$$

wobei n_0, a und λ_0 empirische Materialkonstanten darstellen. Er nimmt mit kürzer werdender Wellenlänge zu. Damit ergibt sich für D:

$$D = -\frac{\text{const.}}{(\lambda - \lambda_0)^2} \tag{9}$$

Die Dispersion wächst mit kleiner werdender Wellenlänge. Man bezeichnet diesen Fall als normale Dispersion.

2. Das Auflösungsvermögen

Aufgrund der Beugungserscheinungen an den Rändern des Prismas erhält man keine scharfen Spaltbilder, sondern „Beugungsscheibchen“ endlicher Ausdehnung. Dies führt dazu, dass die Spaltbilder benachbarter Wellenlängen λ bzw. $\lambda + \Delta\lambda$ unter Umständen nicht von einander getrennt werden können.

Nach dem Kriterium von Rayleigh gelten zwei Bilder gerade noch aufgelöst, wenn das erste Beugungsminumum des einen Spaltbildes mit dem zentralen Maximum (nullter Ordnung) des anderen Bildes zusammenfallen. Dies ist bei einem Prisma mit einer rechteckigen Breite B der Fall, wenn die beiden Spaltbilder unter dem relativen Winkel θ_B mit

$$\theta_B \approx \tan\theta_B = \frac{\lambda}{B} \tag{10}$$

eintreffen. Damit ist auch der Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ bestimmt, der gerade noch aufgelöst werden kann. Es gilt:

$$\Delta\delta(\lambda) = \theta_B = \Delta\lambda\,\frac{\partial\delta}{\partial n}\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \tag{11}$$

Als spektrales Auflösungsvermögen A bezeichnet man die Größe:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B\,\frac{\partial\delta}{\partial n}\,\left|\frac{dn}{d\lambda}\right| \tag{12}$$

Hierbei müssen die Absolutbeträge der Dispersion genommen werden, da das Auflösungsvermögen stets positiv sein soll. Bei vorgegebenem Prisma und Fernrohr lässt sich der Ausdruck reduzieren zu:

$$A = S\,\left|\frac{dn}{d\lambda}\right| \tag{13}$$

S bezeichnet die Basisbreite des ausgeleuchteten Prismenbereiches. A ist maximal, wenn das Prisma vollständig ausgeleuchtet ist. Das Auflösungsvermögen ist umso größer, je größer das Prisma und je größer die Dispersion ist.

3. Die Winkeldispersion

Aus Gleichung (5) geht hervor, dass der Ablenkwinkel δ eines Prismas neben dem Einfallswinkel α_1 und dem brechenden Winkel ε auch vom Brechungsindex n des Prismenmaterials abhängt. Damit wird δ eine Funktion von der Wellenlänge: $\delta(\lambda)$ des einfallenden Lichtes. Bei vorgegebenem Brechenden Winkel ε und Einfallswinkel α_1 gilt dann in guter Näherung:

$$\delta(\lambda) = \delta_0 + \frac{K_0}{\lambda - \lambda_0} \tag{14}$$

δ_0, K_0 und λ_0 bezeichnen jeweils Konstanten. In Analogie zum Brechungsindex bezeichnet man die Änderung des Ablenkwinkels mit der Wellenlänge als Winkeldispersion $d\delta(\lambda)/d\lambda$. Man kann die Winkeldispersion ausnutzen, um Licht in seine Komponenten zu zerlegen. Tritt nämlich ein Gemisch von Wellenlängen auf das Prisma, so werden sie nach (14) unterschiedlich abgelenkt. Ist die Winkeldispersion bekannt, lässt sich aus dem gemessenen Ablenkwinkel δ die Wellenlänge λ ermitteln

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \left(\frac{\partial\delta}{\partial n}\right)_{\varepsilon,\alpha_1} \frac{dn}{d\lambda} \tag{15}$$

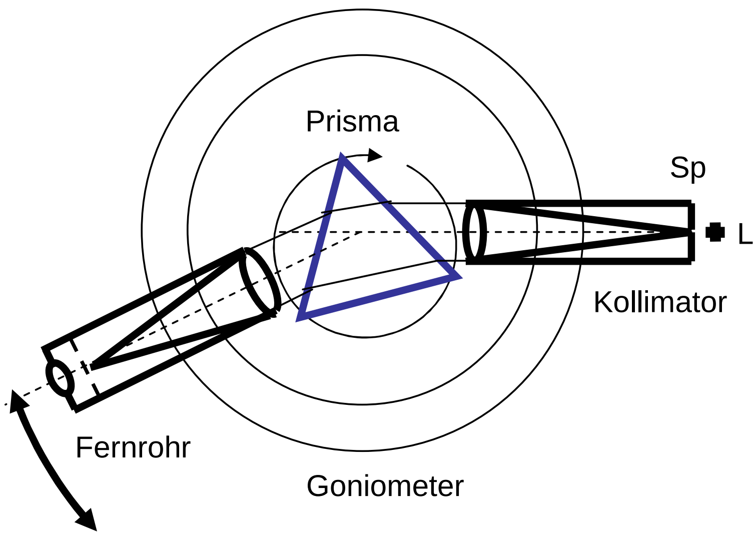
Der erste Faktor hängt bei konstantem ε und α_1 von α_2 und β_1 ab. Im Falle der Minimalablenkung reduziert sich diese Abhängigkeit auf:

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial n}\right)_{\varepsilon,\alpha_1} = \frac{2\ \sin\frac{\varepsilon}{2}}{\cos(\frac{\delta_{min}+\varepsilon}{2})} \tag{16}$$

Der zweite Faktor stellt die Dispersion des Prismenmediums dar. Die Winkeldispersion ist also der Dispersion des Brechungsindexes proportional. Dabei ist die Proportionalitätskonstante umso größer, je größer der brechende Winkel ε ist.

4. Der Prismenspektralapparat

Ein Spalt Sp wird mit dem zu analysierenden Lichtspektrum der Spektrallampe L beleuchtet. Die Kollimatorlinse erzeugt ein paralleles Strahlenbündel, welches auf das Prisma fällt, wo es anschließend gebrochen wird. Das Herzstück des Prismenspektralapparat besteht aus einem Drehtisch (Goniometer) mit einer feinen Gradteilung, die mit Hilfe eines Nonius sehr genau (typ. eine halbe Winkelminute, d.h. 1/120 Grad) abgelesen werden kann. Der frei drehbare Arm trägt ein Beobachtungsfernrohr, in welchem das Spaltbild beobachtet wird. Das Objektiv des Fernrohrs erzeugt ein scharfes Bild des Spaltes in der Zwischenbildebene, welches gemeinsam mit einem Fadenkreuz durch das Okular betrachtet wird. Da der optische Weg im Prisma wegen der Dispersion von der Wellenlänge abhängt, erhält man für jede Wellenlänge ein separates Spaltbild.

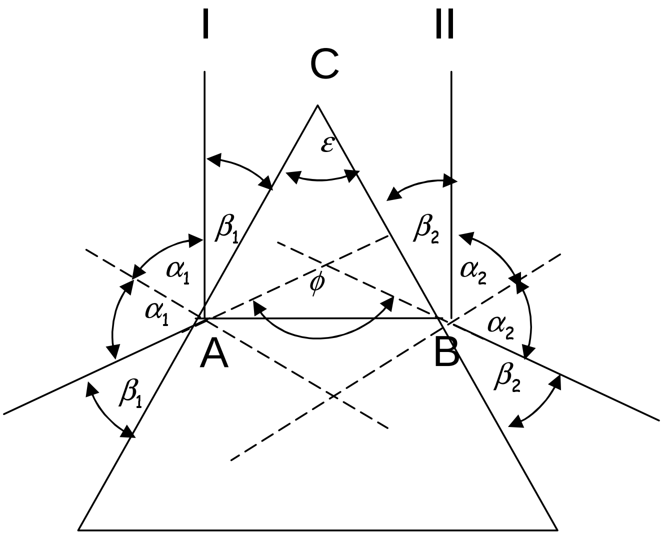


Die Winkeldispersion ist i.A. nicht bekannt. Man kann sie jedoch durch eine Eichmessung ermitteln. Dazu verwendet man Licht bekannter Wellenlängen und misst unter der Bedingung minimaler Ablenkung deren Ablenkwinkel. Da in vielen Fällen der minimale Ablenkwinkel nur wenig von der Wellenlänge abhängt, genügt es, die Apparatur auf die Minimalablenkung für eine mittlere Wellenlänge einzustellen. Man trägt die gemessenen Ablenkwinkel in einem Diagramm gegen den Reziprokwert der Wellenlängen auf. Diese Kurve nennt man Eichkurve. Will man nun die Wellenlängen unbekannter Lichtquellen bestimmen, geht man in umgekehrter Reihenfolge vor. Man bestimmt mit dem geeichten Spektralapparat den Ablenkwinkel $\delta(\lambda)$. Über die Eichkurve lässt sich die zugehörende Wellenlänge ablesen.

IV. Versuchsdurchführung

1. Bestimmung des Brechenden Winkels ε

   Das Prisma wird auf dem Tisch so ausgerichtet, dass die brechende Kante in die Richtung des einfallenden Strahles (Spaltrichtung) zeigt.



   Nach der obenstehenden Abbildung wird Teil I des auffallenden Lichtes an der linken, Teil II an der rechten Fläche des Prismas reflektiert. Die reflektierten Strahlen werden im Fernrohr beobachtet und mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht. Die entsprechenden Winkelstellungen werden mit Hilfe des Nonius auf der Winkelskala abgelesen. Es gilt dann die Beziehung: $\phi = \varepsilon + \beta_1 + \beta_2$.

   Andererseits ergibt sich aus dem Dreieck ABC: $\varepsilon = \beta_1 + \beta_2$.

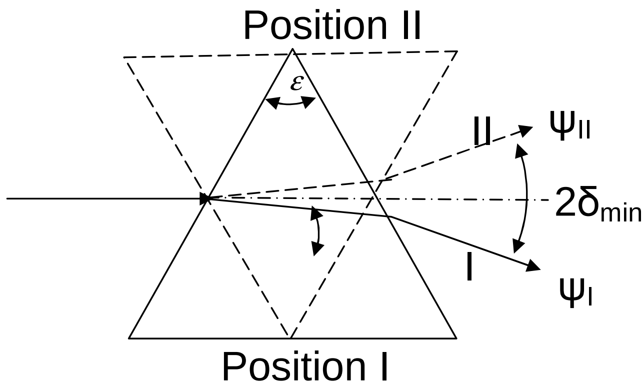
   Damit ergibt sich $\varepsilon = \phi/2$. Um die Messfehler klein zu halten, wird die Messung mehrfach wiederholt und der Mittelwert berechnet.

   Es stehen zwei Prismen aus unterschiedlichen Glassorten zur Verfügung: **Kronglas** $(n = 1.516)$ **und Flintglas (**$n = 1.620$**).** Für beide Prismen ist der brechende Winkel zu bestimmen. Beide Prismen sind gleichseitige Dreiecke. Welchen theoretischen brechenden Winkel erwarten Sie?

2. Bestimmung des Winkels der Minimalablenkung.
   Man lässt nun das Licht schräg auf eine der beiden Prismenflächen fallen und beobachtet das Spaltbild im Fernrohr. Bei gleichsinniger Drehung des Prismentisches und des Fernrohrs bemerkt man, dass das Spaltbild bei einer bestimmten Winkellage seine Richtung umkehrt. Dieser Umkehrpunkt entspricht dem minimalen Wert der Ablenkung. Die Winkelstellung des Umkehrpunktes Ψ_1 wird abgelesen. Der gleiche Versuch wird wiederholt, wobei das Licht auf die andere Prismenfläche fällt. Bei der Minimumstellung wird der Winkel Ψ_2 abgelesen.

   Nach der folgenden Zeichnung ergibt sich dann:

$$\delta_{min} = |\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2}| \tag{17}$$



   Auch hier werden alle Messpunkte mehrfach wiederholt und der Mittelwert angegeben.

   Aus der Formel (6) lässt sich dann der Brechungsindex des Prismas berechnen. Dieser Versuch ist für verschiedene Wellenlängen durchzuführen. Tragen Sie den Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge auf. Der Anstieg ergibt die Dispersion. Es ist die Dispersion für die gelbe Linie (einer Natrumdampflampe) graphisch zu ermitteln.

3. Messen Sie die Winkeldispersionskurve $\delta(\lambda)$ für die Spektrallinien einer Quecksilberspektrallampe, nachdem Sie eine mittlere Spektrallinie auf minimale Ablenkung eingestellt haben.

4. Vergleichen Sie die gemessenen Werte von $\delta(\lambda)$ mit den entsprechenden Werten $\delta_{min}(\lambda)$ der Aufgabe 2 und berechnen Sie die relativen Abweichungen.

5. Wiederholen Sie die Messungen für das zweite Prisma.

6. Ermitteln Sie aus drei Wertepaaren (δ_1, λ_1), (δ_2, λ_2) und (δ_3, λ_3) die Konstanten δ_0 und λ_0 gemäß der Beziehungen:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}{a_1 + a_2 + a_3} \qquad \delta_0 = \frac{\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \delta_3 b_3}{b_1 + b_2 + b_3} \tag{18}$$

   mit

$$a_1 = \delta_1(\lambda_2 - \lambda_3) \qquad a_2 = \delta_2(\lambda_3 - \lambda_1) \qquad a_3 = \delta_3(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{19}$$

$$b_1 = \lambda_1(\delta_2 - \delta_3) \qquad b_2 = \lambda_2(\delta_3 - \delta_1) \qquad b_3 = \lambda_3(\delta_1 - \delta_2) \tag{20}$$

   Die Größe K_0 ergibt sich aus dem Anstieg der Kurve

$$\delta(\lambda) - \delta_0 = \frac{K_0}{\lambda - \lambda_0} \tag{21}$$

7. Messen Sie den Ablenkwinkel für die Spektrallinien einer unbekannten Spektrallampe und bestimmen Sie aus der Eichkurve die zugehörigen Wellenlängen.

   Um welches Element handelt es sich?

Anhang

Wellenlängen verschiedener Elemente: (alle Angaben in Nanometer)

Allgemeine Farbempfindung:
violett 380-435
blau 435-500
cyan/blaugrün 500-520
grün 520-565
gelb 565-590
orange 590-625
rot 625-740

Wasserstoff:
violett = 410.2, 434.0
blaugrün = 486.1
rot = 656.3 und 656.3

Natrium:
grün = 568
(568.27 und 568.82)
gelb = 589
(589.5932 und 588.9965)

Helium:
(s = schwach, m = mittel, h = hell)
violett = 438.793(s)
blau = 443.755(s), 447.148(h),
471.314(m), 492.193(m)
blaugrün = 501.567(h), 504.774(s)
gelb = 587.562(h)
rot = 667.815(m)

Quecksilber:
violett = 404.7
blau = 435.8
grün = 546.1
gelb = 578
rot = 691 und 623

Neon:
grün = 540.1
gelb = 585.2, 588.2
orange = 603.0, 607.4, 616.4
rot-orange = 621.7, 626.6
rot = 633.4, 638.3,
640.2, 650.6, 659.9,
692.9,703.2

Cadmium:
blau-violett = 441.46(m)
blau = 467.82(h)
blaugrün = 479.99(h)
grün = 508.58(h)
gelb-rot = 635.99(s)
rot = 643.85(h)